



Initiation et propagation de la rupture sismique : instabilité de frottement en élastodynamique

Pascal Favreau

► To cite this version:

Pascal Favreau. Initiation et propagation de la rupture sismique : instabilité de frottement en élastodynamique. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2000. Français. NNT : . tel-00749688

HAL Id: tel-00749688

<https://theses.hal.science/tel-00749688>

Submitted on 8 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1
SCIENCES & GEOGRAPHIE

N°

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Discipline: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

Présentée et soutenue publiquement

par

FAVREAU Pascal

Le 31 Octobre 2000

TITRE DE LA THESE

**Initiation et propagation de la rupture sismique:
instabilité de frottement en élastodynamique.**

Directeur de thèse

CAMPILLO Michel

COMPOSITION DU JURY:

M. H. BUI, <i>Académie, Directeur de Recherche à l'École Polytechnique,</i>	Président
M. R. MADARIAGA, <i>Professeur à l'Ecole Normale Supérieure,</i>	Rapporteur
M. M. RAOUS, <i>Directeur de Recherche au C.N.R.S à Marseille,</i>	Rapporteur
M. F.H. CORNET, <i>Physicien à l' I.P.G. Paris,</i>	Examineur
M. M. CAMPILLO, <i>Professeur à l'Université Joseph Fourier,</i>	Directeur
M. I.R. IONESCU, <i>Professeur à l'Université de Savoie,</i>	Directeur

Auteur: Pascal FAVREAU

Titre: Initiation et propagation de la rupture sismique: instabilité de frottement en élastodynamique.

Résumé. A partir des sismogrammes, une phase de nucléation des séismes, peu radiative, a été détectée. En laboratoire, des expériences de rupture, entre deux blocs rocheux, décrivent un processus de nucléation et donnent une loi d'affaiblissement de la résistance de l'interface en fonction de son glissement relatif. Nous interprétons une partie de ces observations par un modèle d'initiation: une instabilité de frottement en élastodynamique. Dans le cas unidimensionnel, alors qu'une loi en vitesse aboutit à un problème mal posé (multiplicité de solution, chocs et nécessité de la convention de retard maximal), une loi en glissement fournit une solution unique, continue, avec un temps d'instabilité non nul. Nous étudions les propriétés de l'initiation dans des problèmes de cisaillement bi et tridimensionnels en élasticité complète avec la loi en glissement. Quand une linéarisation est possible, nous menons une analyse spectrale et trouvons une approximation analytique (partie dominante). Pour des processus complexes (affaiblissement non-linéaire, hétérogénéité et propagation de la rupture), nous simulons numériquement en différences finies. Le temps d'initiation est fonction de la géométrie et de la taille de la faille, en rapport avec le taux d'affaiblissement initial. Proches de la stabilité (taux faible) les failles finies s'initient très lentement. Aussi, le signal émis en surface par l'initiation en profondeur est très dépendant de ce taux. Enfin nous montrons que l'hétérogénéité rallonge le temps d'initiation. Ces propriétés ont été vérifiées à la fois dans les cas bi et tridimensionnels.

Discipline: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

Mots-clés: initiation, propagation, rupture, instabilité, frottement, élastodynamique, séisme.

UFR Observatoire. Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique.

1381 rue de la piscine 38041 GRENOBLE CEDEX 9 FRANCE

&

UFR SFA, Laboratoire de Mathématiques.

Camus scientifique 73376 LE BOURGET-DU-LAC CEDEX FRANCE

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1
SCIENCES & GEOGRAPHIE

N°

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER

Discipline: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

Présentée et soutenue publiquement

par

FAVREAU Pascal

Le 31 Octobre 2000

TITRE DE LA THESE

Initiation et propagation de la rupture sismique:
instabilité de frottement en élastodynamique.

Directeur de thèse

CAMPILLO Michel

COMPOSITION DU JURY:

M. H. BUI, <i>Académie, Directeur de Recherche à l'École Polytechnique,</i>	Président
M. R. MADARIAGA, <i>Professeur à l'Ecole Normale Supérieure,</i>	Rapporteur
M. M. RAOUS, <i>Directeur de Recherche au C.N.R.S à Marseille,</i>	Rapporteur
M. F.H. CORNET, <i>Physicien à l' I.P.G. Paris,</i>	Examineur
M. M. CAMPILLO, <i>Professeur à l'Université Joseph Fourier,</i>	Directeur
M. I.R. IONESCU, <i>Professeur à l'Université de Savoie,</i>	Directeur

Remerciements.

Je remercie mes directeurs de thèse Michel Campillo et Ioan Ionescu de m'avoir aiguillé dans l'aventure qui a abouti à cette thèse. Le sujet: l'initiation des tremblements de Terre ... Intéressant. Mais de quoi peut-il bien s'agir? A vrai dire, on n'en sait rien! Bref ils m'avaient fourré dans un sacré pétrin. Heureusement, ils avaient prévu de bonnes conditions de travail et des visites à l'étranger en Savoie ou à Boston et à San Fransisco et même en Sicile. Ainsi j'ai pu rencontrer presque toutes les personnes qui animent la recherche sur la source des tremblements de Terre et la mécanique du frottement. Ils avaient aussi prévu l'intervention de sympathiques collaboratrices et surtout un excellent compagnon de route, Christophe Voisin, également en thèse en même temps que moi sur le vaste sujet qui nous a mobilisés pendant trois années. Bref on a bien travaillé (je pense) mais on a aussi bien rigolé (ici pas de doute). Je reviens à mon premier directeur de thèse, Michel. Je le remercie de m'avoir dit souvent: "Oui, tu devrais aussi regarder ceci, puis ceci et peut-être ceci?". Ainsi je n'ai jamais manqué de matière. Comme j'avais tendance à ne jamais faire ce qu'il me proposait dans l'ordre logique, il a vite réalisé qu'en me demandant autre chose, je faisais ce qu'il aurait aimé que je fasse. Avec mon deuxième premier directeur, Ioan, on peut dire qu'il en allait tout autrement. Je le remercie de m'avoir dit souvent: "Non, il faut que tu finisses ça!". Imparable. J'exagère un peu car il leur est souvent arrivé d'échanger ces deux rôles complémentaires. En tous les cas, bien que près de crouler tous les deux sous les charges administratives, ils ont pu me consacrer suffisamment de temps pour que je bénéficie de leur grande compétence scientifique et de leur enthousiasme permanent.

Je remercie beaucoup les membres du jury de m'avoir tous fait l'honneur de leur participation à la soutenance. Celle-ci s'est déroulée dans une très chaleureuse ambiance et pleine de suspense car le portable que j'ai utilisé s'est (lamentablement) mis en veille au beau milieu de ma soutenance. Ainsi, j'ai du bénéficier d'une taquine mais bienveillante séance de questions de la part du jury. Je remercie R. Madariaga pour sa remarque "On a le sentiment que tu penses, sans le dire vraiment, que la rupture sait jusqu'où elle va s'étendre dès sa naissance. Moi je n'y croie pas!" (dois-je comprendre que mon travail ne sert à rien?). Je remercie Michel Raous pour son élogieux rapport, dans lequel il précise que je sacrifie parfois la rigueur à l'enthousiasme (dois-je comprendre, qu'en plus, mon travail risque d'être faux?). Je remercie François-Henri Cornet de m'avoir rappeler cette réalité qui complique tout: il y a des fluides dans la croûte (pour finir mon travail serait-il hors sujet?). Enfin je remercie monsieur Bui, président du jury, pour m'avoir posé cette colle: "Où se trouve la faille du fleuve rouge?" (mon manque de culture géographique a du impressionné!). Je ne remercie pas Michel Campillo d'avoir "rebooté" (sauvagement) le portable quand celui-ci m'a fait défaut car cela n'était pas nécessaire. Je ne remercie pas Ioan de ne pas l'en avoir empêché. Mais je les remercie très chaleureusement pour leurs remerciements. Je remercie tout le public de n'avoir manifesté ni impatience ni angoisse pendant la panne informatique mais je ne congratulate pas la fraction du public connaisseur qui a paniqué plus que moi-même.

Je remercie mon compagnon de route Christophe Voisin. Dire qu'on a eu les mêmes directeurs de thèse, des sujets proches, très proches, et qu'on a eu le même bureau pendant deux ans et qu'on a été co-locataires pendant deux ans aussi et que j'en passe. Les meilleurs choses ont une fin? Même pas! Je pars en post-doc à Santa Barbara et lui à San Diego (300 km de distance). Et le comble, c'est que nos patrons respectifs en Californie ont eu le même directeur de thèse eux aussi. Des choses pareilles ne s'interprètent pas, elles se vivent. Je me permets de remercier sa compagne Morgane Marzin pour son humeur et son esprit absolument rayonnants.

Je remercie Jean-Pierre Gratier qui m'a introduit dans le laboratoire il y a cinq ans et avec qui j'ai fait mon stage de DEA. Grâce à son enthousiasme nous continuons à collaborer sur la question des fluides dans les failles.

Je remercie les as de l'info: Catherine Pequegnat (toujours dispo et parfois un peu stressée ... c'est normal car on lui en fait voir de bonnes), Françoise Roch (toujours dispo et plutôt bavarde) et Pierre Valiron pour nous avoir procuré cette formidable machine de calcul "hal" dont j'ai vivement usé et abusé pendant sa période d'essai. Le silicium a chauffé ces derniers temps.

Grand merci à nos dynamiques, efficaces, disponibles et très gentilles secrétaires Martine Prot, Jocelyne Chagny et France Blanc, qui ont toujours su me pardonner de leur demander mes missions la veille ou le jour de mes missions, voire le lendemain.

Je remercie tout le personnel du laboratoire. Franchement, je vais me garder de faire une liste exhaustive car je vais en oublier, mais merci à Michel Bouchon pour son idée de "forum du labo", que nous avons relancée pendant l'une de ses escapades aux amériques. Il faudrait re-lancer une formule de ce style. Merci à Jean-Robert Grasso pour son inimitable sens de la critique. Par contre, je ne sais pas si nous avons convaincu Georges Poupinet que l'initiation des séismes peut exister car c'est un projet en soi (de l'en convaincre). Cependant, nos élucubrations ont quand même provoqué une petite curiosité et un intérêt général dans ce laboratoire.

Je souhaite bonne chance à Sylvie Wolf et à Béatriz Lopez, en thèse avec mes chers directeurs. Elles prennent le relai dans notre travail. Ne soyez pas obligées de devenir co-locataires. Je souhaite à Tatiana Barliaeva plein de succès dans les difficiles problèmes que nous lui avons proposé d'éclaircir.

Je remercie tous les étudiants du laboratoire pour les supers moments que nous avons passés ensemble. Je donne des noms? Je vais en oublier! les oubliés vont se vexer? He bien qu'ils se vexent si ça leur chante! Mais pour éviter cela, je vais juste évoquer quelques activités qui vous remettront tous très facilement: Soirées cartes à jouer. Soirées bouffes (pantagruéliques pour moi et raffinées pour les autres). Soirées anniversaires (bruyantes). Soirées crémaillères (très bruyantes). Soirées jour de l'an. Soirées catherinettes. Soirées foot/rugby au bar. Soirées bar (sans d'autre prétexte que le bar). Journées foot (on a battu une équipe de jeunes, invaincue depuis trois ans sur toute la région Nord-Vercors!). Journées pas de chance (la fois où j'ai croisé ce type qui, après avoir voulu ma peau, s'est contenté de me refaire le portrait sans raison valable. Cette histoire avait fait du bruit à l'époque). Journées ski (Y'en a eu de vraiment bonnes, poudreuses ou glacées ou givrées ou tendiniteuses ou conjonctiviteuses ou dans le brouillard et surtout avec des gamelles spectaculaires et artistiques). Journées cyclisme ("bourrin"). Journée triathlon (encore plus "bourrin"). Journées musée (il n'y en a pas eu beaucoup mais je les signale). Journées planche à voile (je pardonne ceux qui se sont plaints de la météo et ceux qui m'ont déchiré une voile). Journées randonnées d'été (avec toujours trop de soleil ou pas de soleil du tout, voire que de la pluie).

Je remercie très chaleureusement tous mes amis et amies pour leur soutien, les divertissements et la tendresse qu'ils m'ont apportés.

Enfin, je remercie mes parents, pour leur soutien, surtout depuis la fin de la thèse où, bien qu'étant en post-doc, je mène une vie de bohème pas toujours facile à organiser. Je remercie mes parents, ma soeur Laurence et son mari Christophe, mon frère Pierre-Yves, mes grand-mères, mes tantes, oncle et cousins-cousines de continuer à me poser des tas de questions embarrassantes sur les tremblements de Terre alors que je leur donne des explications par toujours très claires. C'est le meilleur signe de leur soutien. J'espère que mon neveu Cyril ne tardera pas à en faire autant. Je les remercie pour la formidable organisation du pot de soutenance qui fut délicieux.

Table des matières

1	QUEL MODELE PHYSIQUE POUR L'INITIATION?	9
1.1	Le solide déformable et la loi de frottement.	10
1.1.1	Deux familles de lois de frottement expérimentales en géophysique.	10
1.1.2	Les modèles de corps élastique. Séisme et sismicité.	16
1.2	Une régularisation du frottement fonction de la vitesse de glissement en élastodynamique.	20
2	ASPECTS THEORIQUES DE L'INITIATION BIDIMENSIONNELLE.	37
2.1	Initiation libre sur une faille infinie.	38
2.1.1	Initiation d'une instabilité de cisaillement dans le cas antiplan avec une loi de frottement dépendante du glissement.	38
2.1.2	Initiation d'une instabilité de cisaillement dans le cas plan avec une loi de frottement dépendante du glissement.	45
2.1.3	Extension à l'initiation d'une fissure en mode d'ouverture.	67
2.2	Initiation confinée sur une faille finie.	70
2.2.1	Initiation d'une faille finie antiplane. Principes et approche spectrale.	70
2.2.2	Résultats analytiques et numériques.	73
2.2.3	Une synthèse des résultats sur les failles finies antiplanes et planes.	80
2.3	L'approximation quasi-dynamique en phase d'initiation.	85
2.3.1	Définition de l'approximation quasi-dynamique en phase d'initiation.	85
2.3.2	Justification du biais de cette approximation par l'analyse spectrale.	86
2.4	Initiation et bi-matériaux.	90
2.4.1	Le cas antiplan: partie dominante analytique et solution numérique.	90
2.4.2	Le cas plan: quelques essais numériques.	91
3	INITIATION TRIDIMENSIONNELLE. IMPLICATIONS.	101
3.1	Aspects théoriques et méthode numérique.	102
3.1.1	Aspects théoriques.	102
3.1.2	La méthode numérique de différences finies.	123
3.2	Modèles réalistes et implications pour l'observation.	135
3.2.1	Modèles simples. Observations globales. Sismogrammes synthétiques de phase d'initiation.	135
3.2.2	Initiation sur une faille hétérogène.	152
4	LE CHANGEMENT D'ECHELLE.	159
4.1	Définition d'une loi de frottement effective.	160
4.2	Une extension au cas tridimensionnel.	185

INTRODUCTION.

Une application de la sismologie est de prévenir et de réduire les dégâts engendrés par les séismes. Les connaissances actuelles du phénomène nous permettent d'appréhender certains aspects du risque sismique. En effet, nous avons une connaissance de mieux en mieux établie sur la propagation de la rupture, la propagation du mouvement dans les structures régionales (lithosphère), la génération des mouvements forts dans les structures locales (bassins) et la réponse des bâtiments. Les outils d'observation existent pour ces problèmes (la sismométrie en grande partie). Ainsi, il est possible de travailler précisément sur des cas, voir de retravailler à posteriori dessus. Cette branche de la sismologie étudie le tremblement de Terre au moment où il se produit, avec tous ses effets. En complément, les analyses sismotectoniques, géologiques et géodésiques (identification des failles actives et des mouvements tectoniques) permettent de déterminer des zones exposées. Récemment, on s'est dirigé vers l'évaluation du risque, à court et à moyen terme, dans les zones environnant les grands séismes. En effet ces derniers, par la perturbation du milieu qu'ils apportent aux alentours, déclenchent des répliques de plus petite taille (leur nombre peut être prédit grâce aux observations passées). Cette autre branche de la sismologie étudie, d'une certaine manière, le "climat sismique".

Poursuivons brièvement avec cette analogie météorologique. Une branche de la sismologie qui ne rencontre pas de succès notable est celle de la prévision du "temps sismique". Autrement dit la prévision d'un séisme imminent (dans l'heure ou la seconde). On peut évoquer des raisons à cet échec. La première est qu'on ne connaît pas bien la physique du déclenchement des séismes. La seconde est que, ne connaissant pas cette physique du déclenchement, on ne sait pas ce qu'il faut observer pour tenter de la comprendre. Peut-être ne se laisse-t-elle pas facilement observer par une signature accessible à notre appareillage de mesure? La seule chose que l'on peut supposer, c'est qu'un séisme prend sa source dans une instabilité. A partir de là, deux tactiques peuvent se dessiner. Avec l'une, on cherche à déterminer le moment de l'instabilité. Dans ce cas, il faut connaître beaucoup de paramètres concernant la faille et le milieu environnant pour calculer son évolution vers l'instabilité et prédire ce moment critique. Avec l'autre, l'instabilité elle-même est un précurseur, non sismique, qui laisse du temps et de l'espace pour être observée. C'est dans cette piste que nous nous engageons.

Cette thèse est donc entièrement consacrée à la description de l'initiation de la rupture sismique vue comme une instabilité. Les outils seront analytiques et numériques. Le modèle d'instabilité est essentiellement mécanique: deux milieux continus élastiques en contact dynamique, le long d'une surface plane. En conséquence, le comportement de ce modèle résultera du couplage des propriétés élastodynamiques des milieux et des propriétés de la loi constitutive de frottement au contact.

Dans le domaine de la mécanique, on étudie plus classiquement des problèmes de contact et de frottement d'un corps déformable sur un corps rigide. Cette configuration non symétrique occasionne des variations de la contrainte normale, qui produisent des baisses locales de la résistance au cisaillement et engendrent une source d'instabilité.

Dans le domaine géophysique, une faille est une frontière entre deux milieux déformables quasiment identiques. D'autre part on considère souvent que la faille est presque plane. Ces deux hypothèses peuvent être remises en question mais nous ne le ferons que de manière brève dans cette thèse. Cette configuration symétrique n'engendre pas de variation de la contrainte normale. La source de l'instabilité doit être cherchée ailleurs. Nous la trouvons simplement dans l'affaiblissement de la résistance au cisaillement de la faille, par le glissement relatif des deux lèvres de la faille. De plus, comme nous le verrons, non seulement nous introduirons un frottement variable (un affaiblissement ou adoucissement), mais nous serons obligés de tenir compte des finesses de sa variation.

La thèse comporte quatre chapitres. Le premier est un chapitre d'introduction au modèle d'initiation. On conduit une discussion sur les expériences de laboratoire et les modèles élémentaires qui nous amène à notre modèle d'initiation. Dans le deuxième, nous établissons des résultats théoriques et analytiques pour les problèmes d'initiation bidimensionnels fondamentaux. C'est là que nous montrons le caractère non sismique ou non radiatif de l'initiation. Dans le troisième, nous généralisons nos méthodes aux problèmes tridimensionnels et nous présentons des expériences numériques qui peuvent servir de base de travail et de réflexion sur la problématique de l'observation de la phase d'initiation. Dans le quatrième et dernier chapitre, nous présentons une technique de mise à l'échelle de la loi de frottement. Un des faits importants est qu'un processus d'initiation sur une faille ayant une loi de frottement simple mais localement hétérogène peut être reproduit globalement au moyen d'une loi de frottement plus complexe (non-linéaire) mais homogène.

Les articles de revue contenus dans la thèse ont un résumé en français et leur bibliographie propre. L'ensemble du texte est suivi d'une bibliographie générale et récapitulative.

Chapitre 1

QUEL MODELE PHYSIQUE POUR L'INITIATION?

Dans ce chapitre, nous évoquons une partie de la problématique des modèles de tremblements de Terre et la justification de notre choix pour notre modèle d'initiation. Cette question n'est pas aisée car elle recouvre des problématiques qui ne se recoupent que relativement rarement. Autour des tremblements de Terre, il y a au moins trois questions fondamentales récurrentes: la nature des séismes, la sismicité et la prévision. Pour simplifier, voici ce qu'on peut souligner dans l'état actuel des recherches. Le modèle de séisme le plus couramment admis et utilisé est celui d'un crack, une discontinuité accompagnée d'une chute de contrainte et se propageant dans un milieu continu ou le long d'une fissure ou faille pré-définie. On peut consulter Freund (1990) ou Aki & Richards (1980) pour une revue des aspects théoriques. L'introduction de lois de frottement non-linéaires dans la faille a permis de modéliser d'autres phénomènes propagatifs plus complexes comme le "pulse" (Perrin et al. (1995)) et des phénomènes de fluage, de nucléation et d'instabilité sur une faille (voir Dieterich (1992) par exemple). Récemment, Andrews & Ben-Zion (1997) proposent que la non symétrie des matériaux de part et d'autre de la fissure ou de la faille peut engendrer des instabilités et des phénomènes propagatifs même lorsque le matériau est en dessous du seuil de rupture. Il faut noter que l'hypothèse de non symétrie est une hypothèse fréquente en mécanique. On y étudie plus couramment le cas d'un solide déformable frottant sur un solide rigide. Dans ce cas, la variation de la contrainte normale alliée à un coefficient de frottement constant est le moteur d'une instabilité. Sur ce sujet il existe beaucoup de travaux mathématiques et / ou numériques. On peut par exemple se référer à des études de Duvaut (1980), Kikuchi (1988), Alart & Lebon (1997) et Raous et al. (1988). Pour des problèmes dynamiques ou d'instabilités on peut consulter Martins & Oden (1983), Oden & Martins (1985), Raous & Barbarin (1995) et Raous et al. (1995).

Pour la génération de la sismicité en général et pour le cycle sismique sur une faille, on trouve des modèles physiques très conceptuels faisant intervenir les automates cellulaires, les transitions de phase (Sornette & Sornette (1990)) et plus généralement les méthodes de la physique statistique. Parmi ces modèles conceptuels, il existe des modèles mécaniques à base de nappe de masse-ressort frottant sur une surface rigide avec des lois de frottement non-linéaires (par exemple Carlson & Langer (1989)). Rice & Ben-Zion (1996) proposent un modèle assez réaliste de cycle sismique sur une faille plane dans un milieu continu en élastodynamique.

Enfin, pour ce qui est de la prévision des séismes, on recourt (sans succès notable jusqu'à présent) à des études statistiques de la sismicité parce que la sismicité est un observable commode et abondant. Les techniques de prévision essaient aussi de faire appel aux précurseurs chimiques (Takamori et al. (1999)) ou électromagnétiques (Vallianatos

and Tzanis (1998)). Le problème est qu'on n'a jamais pu observer à l'avance un mouvement précurseur d'un séisme. Dans nos connaissances actuelles, il manque un modèle cohérent d'initiation de la rupture qui permette d'interpréter certaines observations et surtout de guider les observations futures. Depuis les expériences de nucléation et de rupture dynamique en laboratoire sur des blocs de roche (voir Ohnaka & Shen (1999) pour de récents travaux sur des rugosités différentes), on peut observer localement la préparation d'une rupture dynamique. C'est à partir de ces expériences que nous concevons le modèle d'initiation de la rupture dynamique. Ce modèle fait intervenir les propriétés élastodynamiques de la roche, couplées à une loi de frottement non-linéaire et dépendante du glissement dans la faille.

Dans la première section, nous présentons un peu plus en détail les travaux expérimentaux en laboratoire concernant la phénoménologie de la rupture et les lois de frottement en géophysique. Selon le mode expérimental on obtient des modèles de loi de frottement dépendante de la vitesse de glissement et "rate-and-state" (Dieterich (1979)) ou dépendantes du glissement (Ohnaka et al. (1987)). Nous présentons aussi les différences qualitatives fondamentales entre deux modèles simples mettant en jeu des lois de frottement non-linéaires: le masse-ressort et la plaque élastodynamique unidimensionnelle. Lorsque la plaque élastodynamique glisse avec une loi de frottement dépendante de la vitesse de glissement, la solution peut ne pas être unique et il faut faire appel à un critère de choix. La convention de retard maximal semble la plus appropriée. Malgré tout, la solution reste discontinue et il n'y a pas de temps d'initiation (il est nul).

Dans la seconde section (voir Favreau et al. (1999)), nous montrons que les lois de frottement "rate-and-state" constituent une régularisation des lois de frottement en vitesse en élastodynamique unidimensionnelle. Grâce à elles, le problème admet une solution unique et continue. Le paramètre de glissement critique L contenu dans les lois de frottement "rate-and-state" fournit un temps d'initiation. Lorsque ce paramètre tend vers 0, la loi "rate-and-state" tend vers une loi dépendante de la vitesse et nous montrons numériquement que la solution converge vers la solution déterminée par la convention de retard maximal. Ainsi en élastodynamique, la phénoménologie de l'initiation de la rupture est intimement liée à l'existence d'un glissement critique. En ce sens, elle est fondamentalement liée aux processus de frottement s'affaiblissant en fonction du glissement. Cette conclusion théorique, ajoutée aux résultats des expériences de Ohnaka et al. (1987), nous amène à concevoir l'initiation comme la perte de stabilité en élastodynamique par l'affaiblissement du frottement interne de la faille ou de la fissure en fonction de son glissement relatif.

1.1 Le solide déformable et la loi de frottement.

1.1.1 Deux familles de lois de frottement expérimentales en géophysique.

Depuis que l'on a associé le séisme à un glissement saccadé sur une interface ou un plan de faille (Brace & Byerlee (1966)), les lois de frottement sont devenues nécessaires. En effet la génération d'un glissement brutal à partir d'un équilibre stable nécessite l'introduction d'un comportement instable dans les modèles de séisme. Les caractéristiques de cette instabilité vont dépendre de la loi de frottement comme l'ont suggéré de nombreux auteurs, d'une part Okubo & Dieterich (1984), Scholz (1990) et Ohnaka (1996) dans le cadre expérimental et d'autre part Rice & Ruina (1983) et Ruina (1983) dans le cadre théorique. Comme il s'agit de problèmes de contact entre deux solides élastiques de

mêmes propriétés, la contrainte normale reste constante dans la plupart des processus et la perte de stabilité ne s'effectue pas par elle. La perte de stabilité provient de l'affaiblissement de la résistance par le mouvement de dislocation en cisaillement. La détermination de lois de frottement expérimentales est devenue un enjeu important. Dans le domaine géophysique, où les matériaux sont principalement des roches ou des matériaux de faille (gouge) reconstitués, deux "écoles de lois de frottement" coexistent depuis bientôt une vingtaine d'années.

Commençons par celle des lois de frottement dépendantes de la vitesse de glissement et d'une variable d'état ou "rate and state". Dieterich (1978) trouve expérimentalement une dépendance temporelle logarithmique de la traction admissible par l'interface au repos. Lorsque les surfaces glissent, il en déduit que la vitesse de glissement est une manière d'imposer en continu un temps de contact et donc une valeur de frottement stationnaire pour chaque vitesse de glissement. En effectuant des sauts de la vitesse de glissement, le frottement effectue des sauts conformément à l'idée de stationnarité; mais ces sauts ne sont pas instantanés et ils nécessitent une longueur de glissement caractéristique pour retrouver une valeur stationnaire (Dieterich (1979)). Plus exactement, lors d'un saut positif de vitesse, le coefficient de frottement fait un saut positif presque instantané qui s'oppose à l'accélération imposée par le dispositif puis il diminue progressivement vers une valeur inférieure à celle en cours avant le saut. Sur la figure 1.1, on montre le dispositif utilisé par Mair & Marone (1999). La gouge artificielle est une couche de grains de quartz de granulométrie maîtrisée.

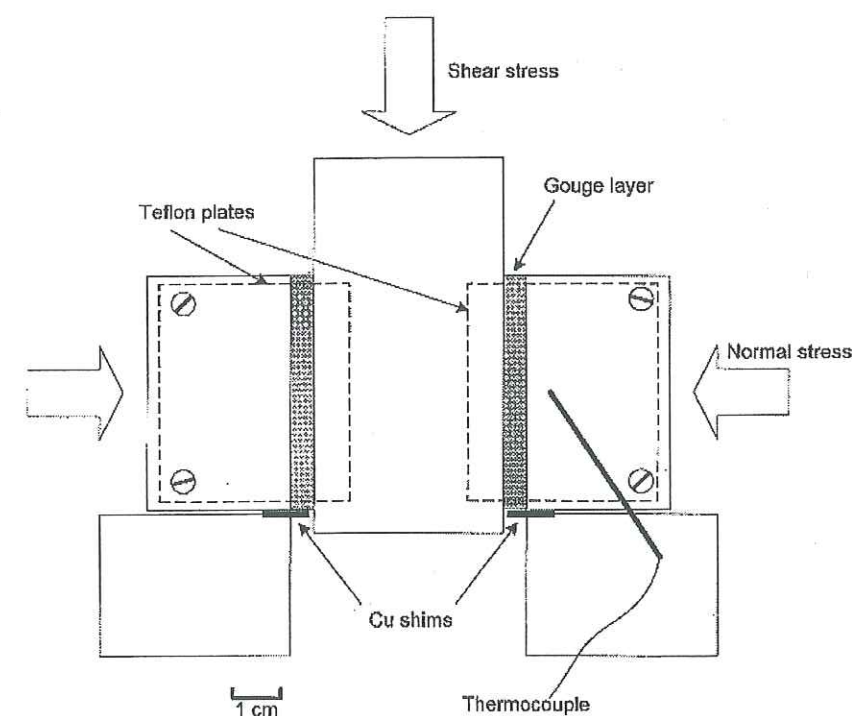


FIG. 1.1 – Le dispositif de sollicitation d'une gouge artificielle à vitesse de glissement imposée, utilisé par Mair & Marone (1999). La taille des échantillons est de l'ordre du centimètre.

Il y a peu de temps, ces expériences étaient limitées à des vitesses de glissement

faibles ($10^{-9}m/s$ à $10^{-6}m/s$) qui correspondent à des conditions de glissement stable ou du fluage dans les failles. Maintenant, les gammes de vitesse de glissement ont augmenté. Le type de résultat systématiquement obtenu est montré sur la figure 1.2. On vérifie clairement la phénoménologie proposée par Dieterich (1979). L'une des premières formulations analytiques de ce comportement est la suivante:

$$\mu = \mu_0 + a \ln(V/V_0) + b \ln(V_0\theta/L) \text{ avec } a > 0, b > 0, V_0 > 0, L > 0$$

$$d\theta/dt = -(V\theta/L) \ln(V\theta/L) \quad (1.1)$$

A première vue, dans la formulation (1.1) le terme en a traduit l'effet stabilisateur et instantané de la vitesse de glissement tandis que le terme en b traduit l'effet déstabilisateur et différé. Plus exactement, comme le glissement stationnaire (steady state) est donné par $\mu_{ss} = \mu_0 + (a - b) \ln(V/V_0)$, c'est le coefficient $a - b$ qui donne la tendance déstabilisatrice car il est généralement négatif. La variable d'état θ traduit l'état de la surface de contact à tout instant. Elle évolue continûment et de manière différée de la sollicitation, grâce à la longueur de glissement L .

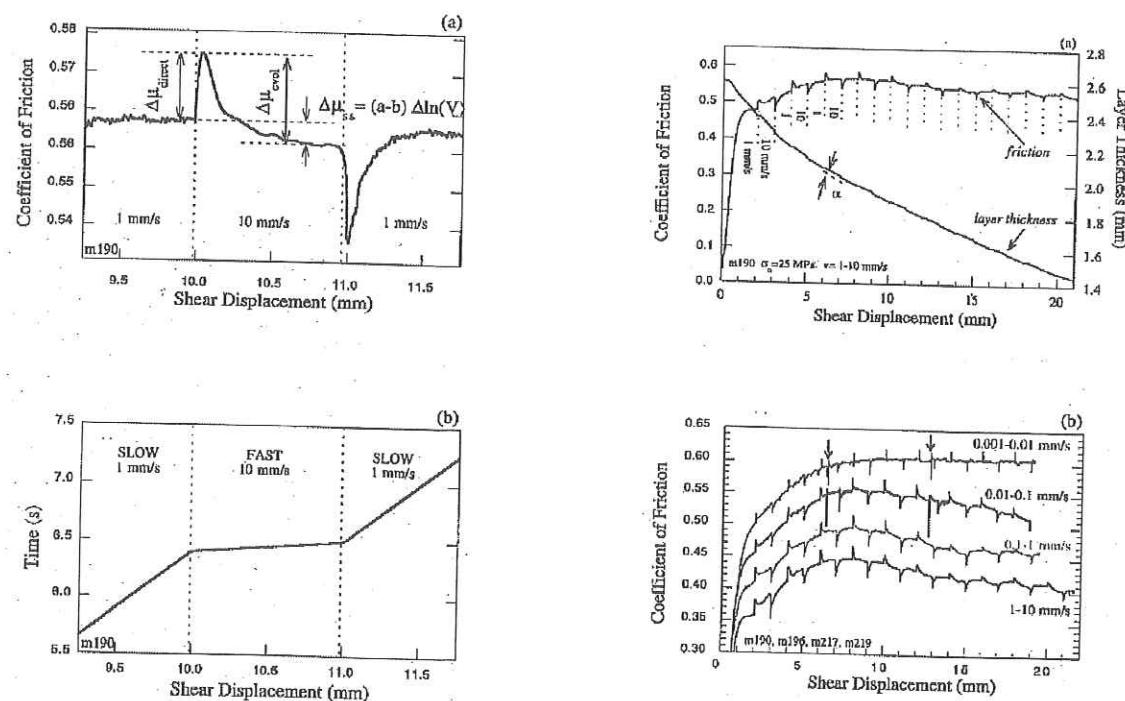


FIG. 1.2 – Le comportement d'une gouge artificielle sollicitée par une vitesse de glissement constante par palier, d'après Mair & Marone (1999). A gauche: le détail du comportement pour une petite sollicitation. A droite: l'évolution globale après une série de petites sollicitations.

La diminution du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement a été identifiée très rapidement comme le moteur des instabilités. Bien que ce comportement soit universel et bien qu'il ait été constaté pour toutes sortes d'interfaces physiquement très différentes comme la roche et l'acier, on peut faire des objections sur cette manière d'expérimenter et de modéliser le frottement. La première objection est de vouloir utiliser ces lois de frottement dans la modélisation des processus dynamiques puisque les conditions physiques subies par l'interface dans ces expérimentations ne sont pas en commune mesure avec les conditions réelles. Lors d'un séisme, l'interface va subir des transformations irréversibles et rapides. C'est ce que montrent indirectement les résultats récents de

Mair & Marone (1999) sur la figure 1.2. A grande vitesse (1 à 10 mm/s), la gouge voit son épaisseur diminuer et le niveau moyen du coefficient de frottement baisse fortement avec le déplacement. Cette observation suggère que l'affaiblissement du coefficient de frottement avec le déplacement est peut-être la phénoménologie la plus importante dans un processus dynamique où la vitesse de glissement va effectuer un saut de 9 ordres de grandeur. Le deuxième reproche est relatif à la formulation de la loi de frottement. D'abord elle découle du mode expérimental restreint et ensuite elle est, à la base, une loi de frottement dépendante de la vitesse de glissement. Or, comme nous allons le voir plus loin, une loi de frottement dépendante de la vitesse de glissement ne permet pas de donner un temps à l'instabilité dans le cadre de l'élastodynamique (ce temps est nul). C'est le glissement critique L qui le donne. Encore une fois la variable "glissement" prend une importance aussi fondamentale que la variable "vitesse de glissement". Finalement les lois de frottement du type (1.1) ont l'avantage d'exhiber les deux dépendances; mais peut-être pas dans les bons rapports lorsqu'il s'agit de processus autres que le fluage stable, c'est à dire l'initiation et la rupture dynamique.

Un peu à l'opposé de cette école, Ohnaka et al. (1987) proposent de mesurer in situ les variables physiques (glissement, vitesse et contrainte) lors d'expériences d'initiation et de rupture dynamique. Le dispositif est montré sur la figure 1.3. Les blocs de roche sont équipés de capteurs de déplacement et de déformation. Le système est soumis à un taux de chargement constant jusqu'à la rupture sur l'interface.

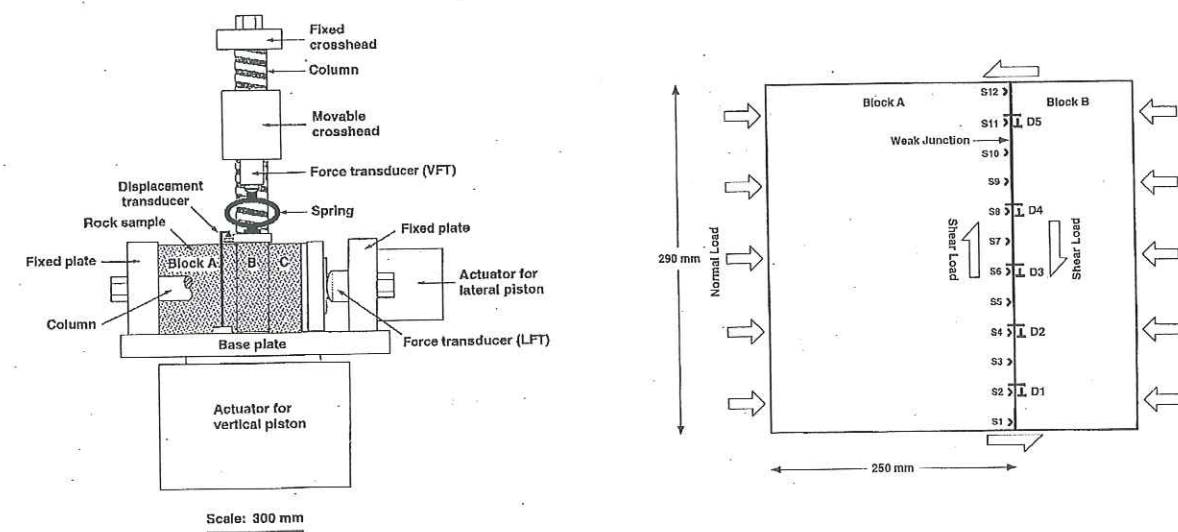


FIG. 1.3 – La presse et les capteurs locaux de la déformation et du déplacement dans les expériences de Ohnaka & Shen (1999).

Sur la figure 1.4, on peut observer la chute de contrainte progressive sur l'interface. Une zone de glissement se localise sur la gauche au niveau des capteurs $S1$ et $S2$. Le capteur $S3$ enregistre la concentration de contrainte avoisinant la zone de glissement. Pendant tout ce temps ($t < 0.6s$), le glissement augmente en amplitude sans vraiment s'étendre spatialement. Autour de $t = 0.6s$, la zone de glissement s'étend rapidement jusqu'au capteur $S3$ et la contrainte vient se concentrer sur le capteur $S4$. Enfin, pendant la dernière phase, la contrainte chute brutalement et cette chute finit par se propager à grande vitesse sur tout l'échantillon. Ce type d'expérience permet donc de dégager une phénoménologie concrète. Les interprétations restent cependant très délicates pour plusieurs raisons. Premièrement, l'état de contrainte initial et la résistance locale sont très hétérogènes. Dans certaines expériences, il semble même que la chute de contrainte soit

petite devant les variations de l'état de contrainte initial. Deuxièmement, il est difficile de conclure sur la nature stable ou instable du glissement pendant toute la phase qui précède la globalisation de la rupture. Pour le savoir, il faudrait stopper le taux de chargement à des intervalles réguliers et attendre un certain temps pour voir si le système va progresser spontanément. Il semble que dans beaucoup des expériences présentées par Ohnaka & Shen (1999) l'évolution est principalement conduite par le taux de chargement et c'est seulement à la toute fin de l'expérience que le système devient intrinsèquement instable.

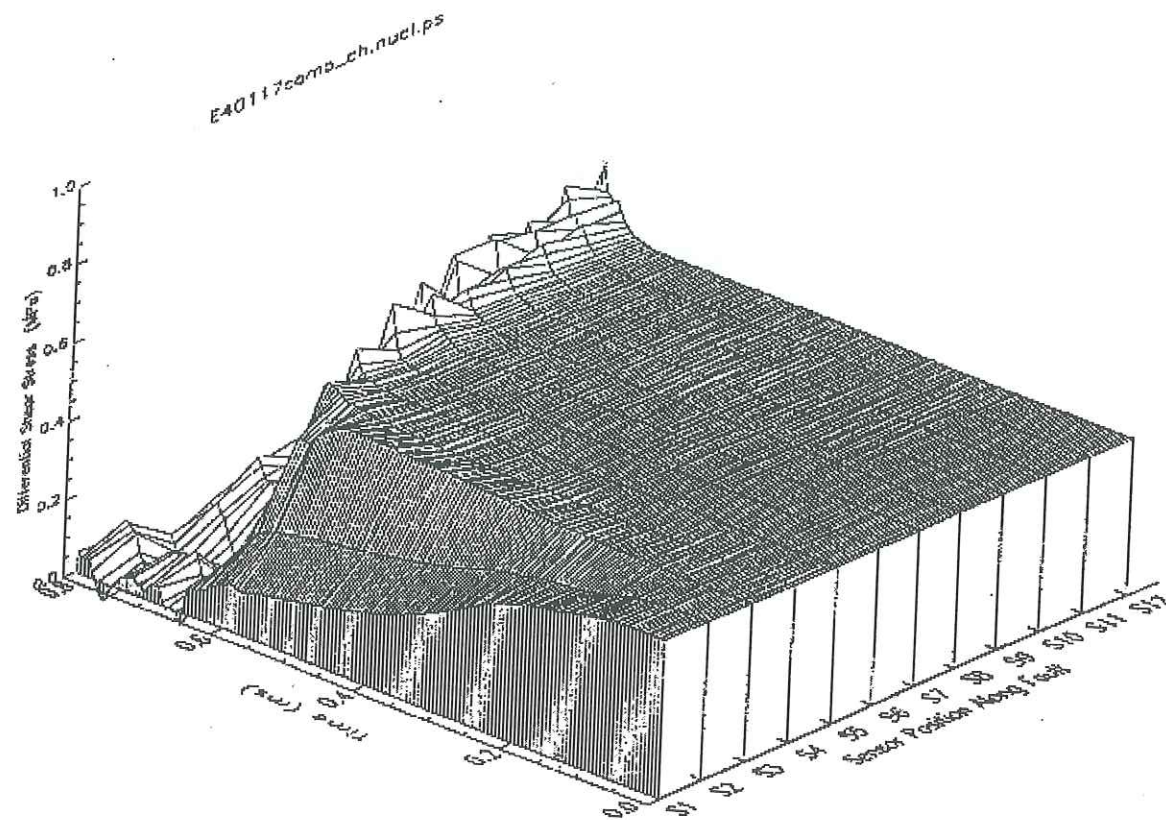


FIG. 1.4 – La variation de la contrainte de cisaillement sur l'interface au cours du chargement, d'après Ohnaka & Shen (1999). Dans cette expérience, la rugosité est considérée comme faible. On observe une phase préparatrice où le glissement est localisé. Après une brève extension locale vers $t = 0.6s$, la rupture dynamique gagne rapidement toute l'interface.

Un autre aspect très positif des expériences de Ohnaka & Shen (1999) est l'obtention de relations de comportement à l'interface, grâce aux capteurs de déformation et de déplacement. Il n'existe aucune relation nette entre la contrainte et la vitesse de glissement. Par contre, on identifie une fonction entre la contrainte et le glissement, comme sur la figure 1.5. La contrainte chute en fonction du glissement avec une certaine pente avant d'atteindre un palier. Ce palier dynamique est atteint quand le glissement dépasse une valeur critique, aux alentours de $2\mu m$ dans l'expérience de la figure 1.5. Donc il semble très différente de celle obtenue par les expériences de frottement à vitesse de glissement imposée de Mair & Marone (1999). On peut tout de même noter que Okubo & Dieterich (1984) ont mené des expériences de laboratoire du même type que celles de Ohnaka et al. (1987) avec des blocs de roche plus gros (taille de plus d'un mètre). Contrairement

à Ohnaka et al. (1987), ils parviennent aussi à obtenir des comportements stick-slip locaux avec arrêt de la rupture. Ils obtiennent aussi des lois constitutives de frottement qui dépendent principalement du glissement.

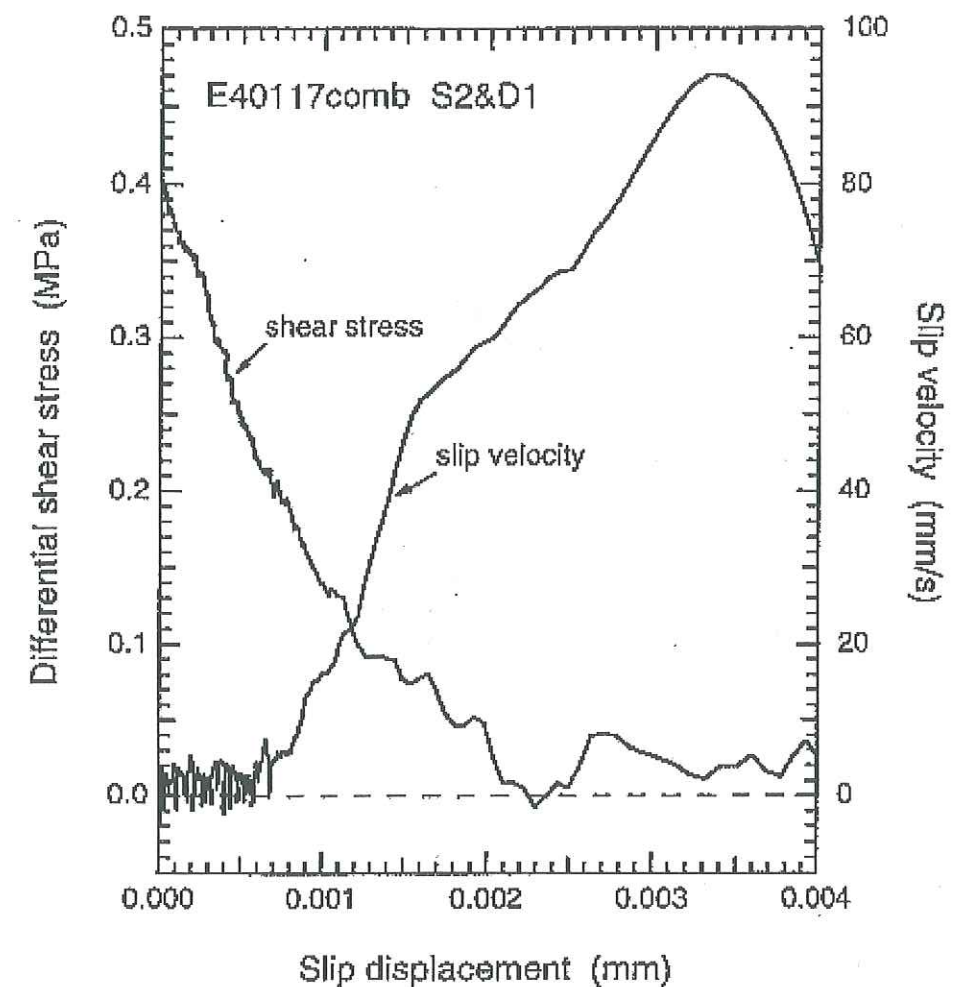


FIG. 1.5 – Le comportement typique obtenu à l'interface dans une expérience de Ohnaka & Shen (1999). Ce dernier se résume à une loi de frottement dépendante du glissement. Les trois principaux paramètres sont la résistance statique, la résistance dynamique et le glissement critique. Ici la chute de résistance est de $0.4MPa$ et le glissement critique est de $2\mu m$.

Enfin pour conclure avec cette section, il faut commenter les ordres de grandeur donnés par les expériences de laboratoire et ceux rencontrés dans les grands et moyens séismes. La chute de contrainte de $0.4MPa$ (figure 1.5) est seulement 1 à 2 ordres de grandeurs plus petite que celle des séismes ($10MPa$ en moyenne). Par contre le glissement critique est 5 à 7 ordres de grandeur plus petit que celui rencontré dans les grands séismes (environ $0.5m$). Il est donc impossible d'utiliser les grandeurs obtenues en laboratoire pour simuler la dynamique basse fréquence d'un grand séisme. Pour cela on peut invoquer que les conditions expérimentales en pression et température associées à un processus dynamique n'ont jamais été approchées. En fait ces conditions ont été approchée récemment par Ohnaka (1997) dans des conditions lithosphériques mais quasi-statiques. Sur des échantillons intacts, où la surface de rupture se crée d'elle même, Ohnaka (1997) trouve des valeurs de glissement critique de plusieurs millimètres, ce qui se rapproche des

valeurs attendues pour les séismes. On peut aussi et surtout invoquer que les grandeurs en laboratoire doivent être renormalisées parce que l'hétérogénéité de la matière, à toutes les échelles, implique un processus moyenné à grande échelle et un jeu de paramètres moyen associé.

1.1.2 Les modèles de corps élastique. Séisme et sismicité.

La loi de frottement est essentielle dans la modélisation des tremblements de Terre. Mais tout aussi important est le modèle choisi pour le corps qui entoure la faille. Ici il est question de géométrie d'une part et de modèle continu ou discret d'autre part. La géométrie influe sur le type d'interaction spatio-temporelle entre les différents points ou éléments du modèle. La discrétisation joue aussi un rôle dans les propriétés mathématiques et physiques du modèle. Lorsqu'elle est abusive elle change les propriétés physiques du modèle. Comme l'a montré Rice (1993) dans ses premiers modèles de cycle sismique, on peut dire qu'avec certains jeux de paramètres, les modèles discrets reproduisent le comportement chaotique de modèles continus trop grossièrement discrétisés. Ainsi le modèle discret perd sa signification physique et ne produit que du bruit.

On peut trouver différentes sortes de modèles pour exhiber tel ou tel aspect de la physique des tremblements de Terre. En effet, le modèle élastodynamique tridimensionnel continu classique est sans doute le moins éloigné de la réalité de tous. On le trouve très tôt dans la théorie de la propagation de la rupture avec Kostrov (1964). Cependant parallèlement à ces développements, on a utilisé beaucoup d'analogies. Ceci est du au fait qu'il a toujours existé deux types de modèles distincts au sujet des tremblements de terre: les modèles de séisme d'une part, qui nécessitent un effort de "réalisme" et les modèles de sismicité d'autre part, qui nécessitent un effort de "conceptualisme". Ainsi le premier modèle conceptuel qui est venu à l'esprit est le modèle de masse-ressort unique ou d'assemblage de masse-ressorts (voir Shaw (1995) pour des travaux récents). Ils sont présentés sur la figure 1.6.

Couplé avec des lois de frottement non linéaires, le modèle de masse-ressort unique permet de simuler des instabilités, des événements ou des séquences temporelles d'événements de type stick-slip. Par exemple, en le couplant avec des lois de frottement "rate and state", Belardinelli (1994) modélise le fluage sur les failles et He et al. (1998) étudient la stabilité avec des conditions de contrainte normale variable. Avec plusieurs éléments disposés sur une ligne ou sur une nappe, on peut simuler une complexité spatio-temporelle et des distributions d'événements de toute taille, ressemblant aux lois de distribution des séismes. On peut noter que les modèles particuliers de la figure 1.6 contiennent les abhérations suivantes. Ils n'ont pas d'épaisseur et la radiation sismique hors du système est impossible. Une partie finie de la masse du système est automatiquement entraînée dans le mouvement (toute la masse dans le cas du bloc unique). Enfin le chargement et la loi de frottement s'exercent partout dans le système. Les propriétés de ces systèmes sont donc bien spécifiques et il convient d'envisager d'autres modèles conceptuels. Nous envisageons entre autre le cas de la plaque élastodynamique unidimensionnelle continue présentée sur la figure 1.7.

Dans ce modèle on ne garde que la dimension spatiale perpendiculaire à la faille. La condition de frottement est localisée sur le bord $x = 0$ et le chargement est imposé sur le bord $x = H$. Le modèle est élastodynamique continu à une dimension. Il est en fait la limite naturelle des modèles élastodynamiques de faille plane en cisaillement, lorsque le glissement est constant sur la faille. Du fait que le glissement est uniforme à l'interface, ses propriétés temporelles se réduisent à celles du glissement de l'interface en $x = 0$ et

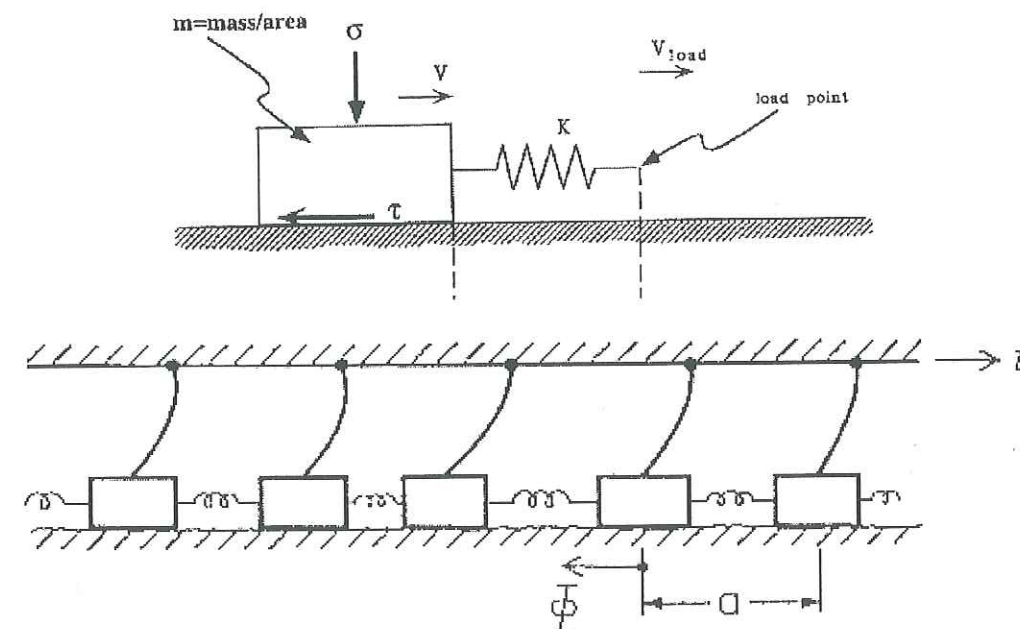


FIG. 1.6 – En haut: le modèle de masse-ressort unique d'après Roy & Marone (1996). En bas: un modèle conceptuel à plusieurs éléments de masse-ressort d'après Shaw (1995)

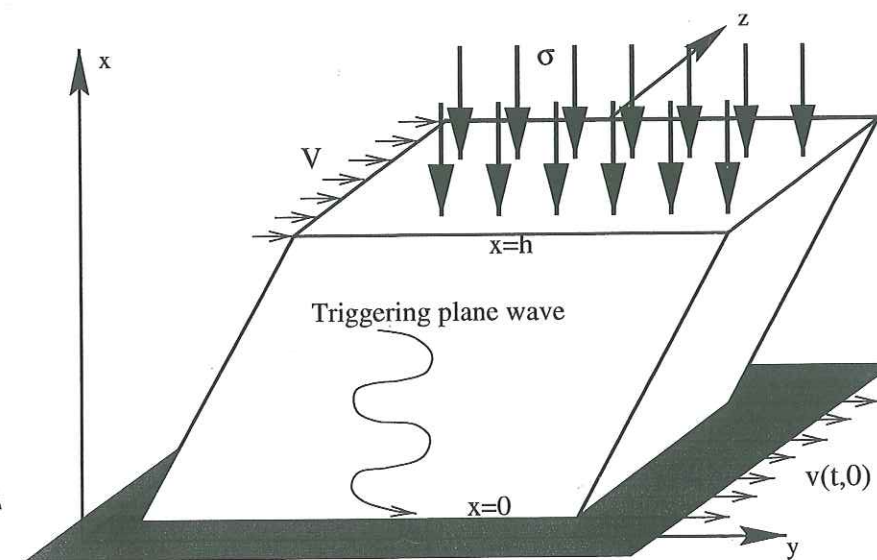


FIG. 1.7 – Le modèle de plaque élastodynamique unidimensionnelle d'après Favreau et al. (1999).

elles peuvent être comparées qualitativement avec celles du glissement de la masse dans le système masse-ressort unique. Campillo et al. (1996) montrent que le comportement des deux systèmes masse-ressort et plaque, avec les mêmes lois de frottement, sont complètement différents, tant physiquement que mathématiquement. Avec une loi dépendante du glissement (figure 1.8), la plaque peut donner lieu à du stick-slip mais pas le masse-ressort. Avec une loi de frottement dépendante de la vitesse de glissement (figure 1.9), le masse-ressort admet une solution unique et continue, tandis que la plaque en admet plusieurs. En sélectionnant la solution par la convention de retard maximal, on obtient une solution physique mais qui reste discontinue. Dans un tel modèle, l'initiation, c'est à dire un glissement instable progressif est impossible.

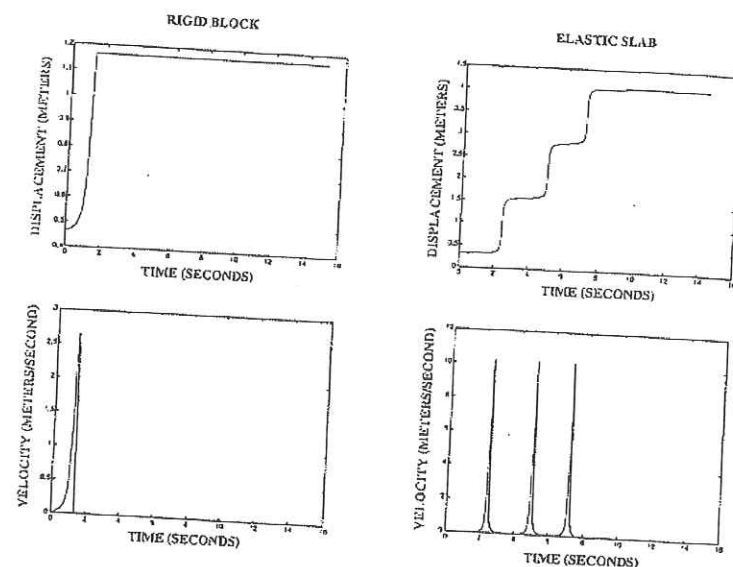


FIG. 1.8 – Deux comportements physiques différents pour le masse-ressort et la plaque élastodynamique, soumis à la même loi de frottement dépendante du glissement: $\mu(u) = \mu_0 + a \sin \omega u$. Le masse-ressort ne donne pas de comportement stick-slip contrairement à la plaque élastodynamique, d'après Campillo et al. (1996).

Pour conclure ici, l'influence du choix du modèle de corps solide déformable est primordial. Le comportement qu'on retire d'un modèle de séisme ou d'un modèle de sismicité va autant dépendre de lui que de la loi de frottement. Les deux composants risquent même d'être inséparables puisque le point de fonctionnement du système nécessite les deux ingrédients. Aussi pour comprendre le mécanisme des séismes, il est peut-être vain de vouloir modéliser et mesurer une loi de frottement sur une surface, hors du contexte dans lequel cette surface va être naturellement sollicitée.

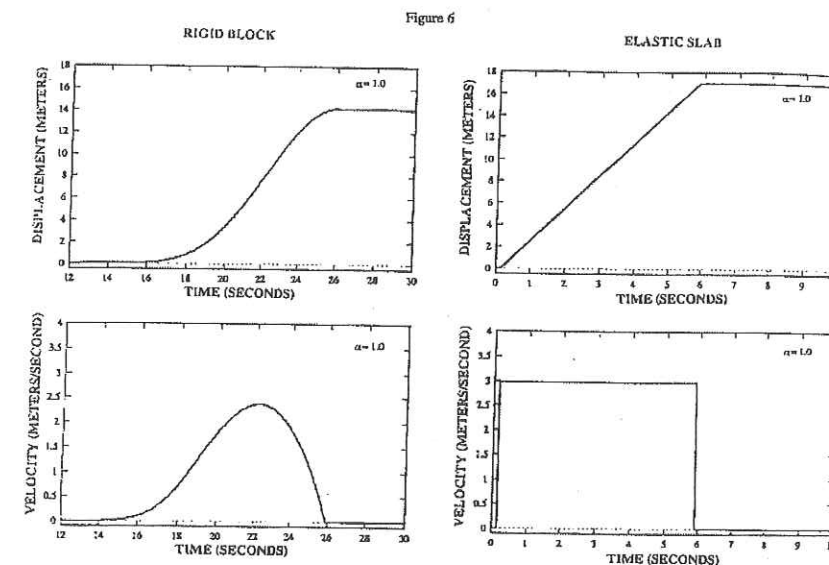


FIG. 1.9 – Deux propriétés mathématiques différentes pour le masse-ressort et la plaque élastodynamique, soumis à la même loi de frottement dépendante de la vitesse de glissement: $\mu(\dot{u}) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)/(1 + \alpha \dot{u})$. Le masse-ressort admet une solution unique et continue. La plaque admet plusieurs solutions. En sélectionnant la solution par la convention de retard maximal, on arrive à une solution physique pour la plaque, mais admettant des chocs (sauts de la vitesse de glissement), d'après Campillo et al. (1996).

1.2 Une régularisation du frottement fonction de la vitesse de glissement en élastodynamique.

On The Dynamic Sliding with Rate and State Dependent Friction Laws

Pascal Favreau, Ioan R. Ionescu and Michel Campillo
Geophysical Journal International 139, 671-678, 1999.

Résumé. Nous considérons le mouvement dynamique d'une plaque élastique soumise à une loi de frottement non linéaire sur un substratum rigide. Nous considérons deux catégories de lois de frottement. La première correspond aux *modèles dépendant de la vitesse*. Cette famille de modèles contient naturellement les modèles stationnaires ("steady state") de Dieterich et Ruina. Dans la seconde catégorie appelée *modèles régularisés dépendant de la vitesse*, la loi de frottement est principalement dépendante de la vitesse mais elles est plus complexe et elle est définie par une équation différentielle générale. Les modèles régularisés dépendant de la vitesse incluent comme cas particulier les lois de frottement dépendantes de la vitesse et d'une seule variable d'état de Dieterich et Ruina. Les deux modèles de frottement montrent des propriétés mathématiques très différentes. Les modèles dépendant de la vitesse donnent une équation scalaire qui n'a pas une solution unique en général. Si l'affaiblissement en vitesse dépasse une certaine valeur, plusieurs solutions existent. Pour surmonter cette difficulté, nous devons définir une règle formelle de choix de la solution. Pour déterminer la solution nous proposons d'utiliser la convention de retard maximal de la théorie des catastrophes. La seconde catégorie de modèles, c'est à dire les modèles régularisés dépendants de la vitesse, donnent une équation différentielle qui a une solution unique. Nous donnons sa condition de stabilité classique et nous montrons qu'elle correspond à la condition de non-unicité dans le premier modèle. En considérant le cas particulier des modèles en vitesse régularisés de Perrin et al., nous montrons numériquement que la solution limite, lorsque le glissement critique tend vers 0 ($L \rightarrow 0$), est celle correspondant au modèle dépendant de la vitesse (le modèle stationnaire "steady state"), en respectant la convention de retard maximal. Ainsi, la convention de retard maximal prend un sens physique parce qu'elle donne une solution qui est la limite de celle d'un problème régulier. Nous suggérons que la convention de retard maximal soit utilisée lorsque la dépendance en vitesse (ou principalement en vitesse) est impliquée. Pour finir nous analysons rapidement le rôle des autres paramètres A et B de la formulation "rate-and-state" dans le cadre de la plaque cisailée.

Abstract. We consider the dynamic motion of an elastic slab subject to non-linear friction on a rigid substratum. We consider two categories of friction laws. The first corresponds to *rate dependent models*. This family of models naturally contains the steady state models of Dieterich and Ruina. In the second category called *regularized rate dependent models* the friction law is mainly rate dependent, but it is more complex and it is defined by a general differential relation. The regularized rate dependent models include as a particular case the classical rate and single state variable friction laws of Dieterich and Ruina. The two models of friction show very different mathematical behaviors. The rate dependent models lead to a scalar equation, which has no unique solution in general. If the velocity weakening rate exceeds a certain value, many solutions exist. To overcome this difficulty, we have to define a formal rule of choice of the solution. To discriminate

the solution we propose to use the perfect delay convention of the catastrophe theory. The second category of models, that is the regularized rate dependent models leads to a differential equation, which has a unique solution. We give its condition of stability and we show that it corresponds to the condition of non-uniqueness of the first model. Considering the particular regularized rate dependent model of Perrin et al., we show numerically that the limit solution when the characteristic slip $L \rightarrow 0$ is the one corresponding to the rate dependent model (the steady state model) assuming the perfect delay convention. Hence the perfect delay convention takes on a physical sense because it leads to a solution that is the limit of a regular problem. We suggest that the perfect delay convention may be used when pure rate (or mainly rate) dependence is involved. Finally we analyze quickly the role of the other parameters A and B of the rate and state formulation in the context of the shearing slab.

Key words: friction, rate dependence, elastodynamics, non-uniqueness, perfect delay convention, regularization.

Introduction The rupture process in earthquakes has a spatio-temporal complexity. Among the causes of that complexity, the heterogeneities of behavior of the material and the heterogeneities of stress inside the faults as well as the geometry of the faults play a great role, but it has been proposed that the non-linear friction on the faults is essential to understand that complexity (see Carlson & Langer (1989)). In return if one includes non-linearities in a fault model, one rarely knows if the problem is well posed because of the presence of discontinuities or singularities induced by the model. Indeed theoretical results on the nature of the discontinuities are missing. In this paper we only focus on the consequence of using a non-linear rate dependent friction law. Here simple models are very useful for that purpose. We can consider that a simple model is based on the definition of two things: the behavior of the body (i.e. the crust) and the type of the friction on the interface (i.e. the fault). As far as the body is concerned, the block slider model has already been well studied in the past few years (see Burridge & Knopoff (1967), Scholz (1990), Gu et al. (1984) and Rice & Ruina (1983)). In this paper we study the sheared slab, which is a model based on the equations of elastodynamics in one dimension. Concerning the friction law, Dieterich and Ruina laws (see Ruina (1983) for earlier works or see Dieterich (1994) for further models) and their derived laws (see Perrin et al. (1995)) have been proposed and experimented in laboratory (see Chester (1995)). Campillo et al. (1996) showed that the choice of the body and especially the choice between a rigid block and an elastic slab is fundamental since the theoretical behaviors observed are very different mathematically and physically speaking in the case of a non-linear rate dependent friction law. They proved that an elastic slab combined to a rate dependent friction leads to a problem with multiple solutions and subsequent temporal discontinuities of the sliding velocity (shocks). Since the rate and state friction laws are mainly rate dependent, our aim is to understand more precisely the relationship between two categories of models, both pure rate dependent friction models, and rate and state dependent friction models. We write down the constitutive equations of the slab and we consider a more general formulation for both models of friction. We examine existence, uniqueness and stability of the solution for both types of models. The first category of models exhibits a problem of uniqueness of the solution if the velocity weakening exceeds a certain value. We propose to use the perfect delay convention to choose the solution. The second model has a unique solution and we characterize its stability in a classical way. We perform numerical simulations with the Perrin et al. model (Perrin et al. (1995)) in order to show that the second model is able to converge to the first model discriminated by the perfect delay convention. Finally we discuss the opportunity of using the perfect delay convention to solve the problems

involving rate dependent friction laws in elastodynamics.

Problem Statement Let us consider the one dimensional shearing of an infinite linear elastic slab bounded by the planes $x = 0$ and $x = h$. The slab is in contact with friction at $x = 0$ with a rigid body (see Figure 1.10). Assume that the displacement field is zero with respect to the direction Oz and that it depends only on $x \in [0, h]$. At the upper surface of the layer we impose a constant and uniform compressive normal stress σ (i.e. $\sigma_{xx}(t, h) = -\sigma$) and a tangential constant velocity V (i.e. $\dot{u}_y(t, h) = V$). Since we are interested only in the evolution of the displacement u_y and of the stress σ_{xy} we shall suppose that the displacement u_x is a linear function of the coordinate x and that it can be obtained from the Hooke's law.

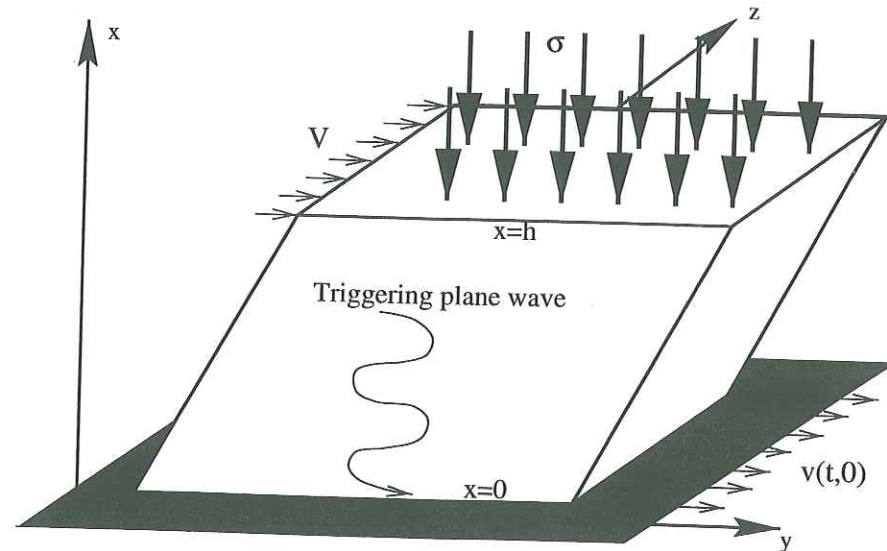


FIG. 1.10 - The model of the slab dragged on $x = h$ at velocity V and slipping on $x = 0$ at velocity $v(t, 0)$. The frictional condition at $x = 0$ is proportional to the normal stress σ . The instability phenomenon is triggered off by the initial conditions like a plane wave for example.

For simplicity we denote $u = u_y$, $v = \frac{\partial u_y}{\partial t}$ and $\tau = \sigma_{xy}$, then the momentum balance law and the Hooke's law may be written:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \tau}{\partial x}(t, x) \quad \forall (t, x) \in]0, T] \times]0, h[\quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(t, x) = \mu \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \quad (1.3)$$

where ρ is the density and μ the elastic shear coefficient. For simplicity we limit our study on $t \in]0, T]$ where T is the time of reflection on the upper boundary of the wave created by the slip itself i.e. $T = 2h/\beta$ where $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$ is the shear wave speed.

The boundary condition for $x = h$ and $t \in [0, T]$ is the following:

$$v(t, h) = V \quad (1.4)$$

Since we limit our study on a duration less or equal to T (the time of reflection on the upper boundary), the thickness h of the slab plays no role here, only the boundary condition at $y = 0$ does.

On the friction surface $x = 0$ we consider two types of non-linear relationships between the shear stress $\tau = \tau(t, 0)$ and the shear motion $v = v(t, 0)$ at the contact. These relations include other variables needed to describe the phenomenon of friction observed in many experiments. In both models of friction, τ is proportional to the load σ at the upper surface of the body and we assume that the slip rate v and the stress τ are always positive. The two models we consider are a pure rate dependent friction and a regularized rate dependent friction that includes the classical Dieterich and Ruina model with a single state variable as a particular case.

In the *rate dependent models*, we study the general case of a rate dependent friction defined by:

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_v(v) \quad \text{for } v > 0 \\ \tau &\leq \tau_s \quad \text{for } v = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

where the function $\tau_v(v)$ is any continuous and decreasing function of the slip rate and $\tau_s = \tau_v(0)$.

In the *regularized rate dependent models*, we study a family of friction laws defined as follows:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= F(v)\dot{v} - K(v)H(\tau - \tau_v(v)) \quad \text{for } v > 0 \\ \tau &\leq \tau_s \quad \text{for } v = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

where K , H and F are explicit continuous functions of the slip rate such that $K(v) > 0$, $H(0) = 0$, $H'(v) > 0$ and $F(v) > 0$. The above formulation has the advantage of leaving completely independent the choices for the functions F , K , H and τ_v .

Firstly, let us introduce the Perrin et al. model (see Perrin et al. (1995)) given by:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau_0 + A \ln((V_0 + v)/(V_\infty + v)) + B \ln(1 + \theta(t)(V_\infty - V_0)/L) \\ \dot{\theta}(t) &= 1 - \theta(t)(V_0 + v)/L \end{aligned} \quad (1.7)$$

This formulation is related to the Dieterich-Ruina slowness model (see Ruina (1983)). In this formulation, the state variable θ is allowed to evolve during the stick phase and its steady state value θ_{ss} is bounded in $[0, L/V_0]$. Besides the state variable evolution, this friction law involves two instantaneous velocity dependences: a velocity weakening and a velocity strengthening. The slowness model is in sharp contrast with the initial Ruina-Dieterich slip model (see Ruina (1983)) for which the state variable is frozen during the stick phase.

Let us now show that the Perrin et al. model is well included in our formulation (1.6). Indeed if we take the following functions:

$$\begin{aligned} F(v) &= A \frac{V_\infty - V_0}{(V_0 + v)(V_\infty + v)} \quad \text{with } A \geq 0 \text{ and } V_\infty \geq V_0 \\ K(v) &= (V_0 + v)/L \\ H(\gamma) &= B(1 - e^{-\gamma/B}) \quad \text{with } B \geq 0 \\ \tau_v(v) &= \tau_{ss}(v) = \tau_s + (A - B) \ln \frac{1 + v/V_0}{1 + v/V_\infty} \quad \text{with } A - B \leq 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

where $\tau_s = \tau_0 + (A - B) \ln(V_0/V_\infty)$, we obtain exactly the form proposed by Perrin et al. (1.7).

As seen previously, the Perrin et al. law, which will be considered in this paper as the reference law, can be written in form (1.6). We should just point out that the choice of the slowness form of Perrin et al. (1.7) is not really of importance for our work. Indeed, as far as we know, all the classical laws involving a single state variable can be written in form (1.6). We have tested several laws proposed by Dieterich and Ruina (see Ruina (1983)) or Perrin et al. (1995). This new general formulation (1.6) points out that the evolution of the stress is governed basically by an instantaneous viscous friction $\tau_v(v)$ (weaker at high velocity) and a regular stress decay governed by $\tau - \tau_v(v)$. During a given step of velocity from V_1 to V_2 , the stress decay takes the form of an exponential whose characteristic slip is $V_2/(K(V_2)H'(0))$. In fact the term $K(v)H(\tau - \tau_v(v))$ can be seen as a viscoplastic regularization of the instantaneous viscous friction $\tau_v(v)$.

Finally we complete the problem statement by taking the initial conditions:

$$v(0, x) = v_0(x), \quad \tau(0, x) = \tau_0(x), \quad (1.9)$$

where v_0 and τ_0 are supposed to be continuous functions.

Theoretical Aspects Our goal in this section is to analyze the nature of the solution for the two models of friction. First let us recall that the evolution of the velocity and the stress functions on the interface $x = 0$ is directly related to the properties of the elastodynamic equations (1.2) and (1.3). Indeed equations (1.2) and (1.3) lead to the 1D wave equation:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) = v_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x)$$

The solution of this equation can be easily deduced in the form $v(p, s) = v_+(p) + v_-(s)$ with $p = x + ct$ (down-going wave) and $s = x - ct$ (up-going wave). Using these new coordinates p and s , one can easily deduce another property of the equations (1.2) and (1.3) that reads:

$$\frac{\partial}{\partial s} [v(p, s)\sqrt{\rho\mu} + \tau(p, s)] = 0 \quad (1.10)$$

Therefore the expression differentiated in equation (1.10) is a function of the only variable p . Hence it is constant for a given characteristic line $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2; x + v_s t = p = \text{const}\}$. If we consider the characteristic line $p = 0$ and if we denote $\Lambda(t) = v(0, v_s t)\sqrt{\rho\mu} + \tau(0, v_s t) = v_0(v_s t)\sqrt{\rho\mu} + \tau_0(v_s t)$ then we deduce that for $x = 0$ and $t \in]0, T]$:

$$v(t, 0)\sqrt{\rho\mu} + \tau(t, 0) = \Lambda(t) \quad (1.11)$$

Here $\Lambda(t)$ may be interpreted as a loading (for Λ increasing) or an unloading (for Λ decreasing) on the fault.

This last equation (1.11) is similar to the one governing the slip along a plane embedded in an infinite elastic medium under an antiplane shear (see Madariaga & Cochard (1994)) in the case of a uniform slip. The governing equation gives the resulting shear stress $\tau(t, 0)$ as the sum of a local instantaneous radiation term $-v(t, 0)\sqrt{\rho\mu}$ and a loading term related to the history of the non local elastic interactions both in space and time (not existing in our study because the slip is uniform) and the external load $\Lambda(t)$. This external load $\Lambda(t)$ is deduced from the initial conditions in the body and it can simulate either a uniform load or an incoming wave. Finally let us remark that the previous scalar equation (1.11) on the friction surface was deduced from the elastodynamic equations, hence it is independent on the choice of the friction law.

Rate Dependent Model By considering the equations (1.11) and (1.5) we find the following scalar equations for the slip rate $v(t, 0)$ on the frictional interface $x = 0$ and $t \in]0, T]$:

$$\begin{aligned} \tau(t, 0) &= \Lambda(t) \quad \text{for } v(t, 0) = 0 \quad \text{and} \quad \Lambda(t) \leq \tau_s \\ \lambda(v(t, 0)) &= \Lambda(t) \quad \text{for } v(t, 0) > 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

where the function λ is given by:

$$\lambda(v) = v\sqrt{\rho\mu} + \tau_v(v) \quad (1.13)$$

From equation (1.12), it appears that the solution $v(t, 0)$ is obtained at the intersection between the curve $\lambda(v(t, 0))$ and the horizontal straight line $\Lambda(t)$ (see Figure 1.11). Two qualitative behaviors are possible according to whether λ is monotonic or not. In the first case, called the regular behavior, λ is increasing i.e. $\tau'_v(v) > -\sqrt{\rho\mu}$ and there is a unique continuous solution $v(t, 0)$ for all continuous $\Lambda(t)$. In the second case, called the irregular behavior, λ is no longer monotonically increasing (see Figure 1.11). For instance let us suppose that there exists $[a, b] \subset \mathbb{R}^+$ such that λ is decreasing on $[a, b]$, i.e. $\tau'_v(v) < -\sqrt{\rho\mu}$ for all $v \in [a, b]$. The solution $v(t, 0)$ is unique if $\Lambda(t) < \lambda(b)$ or $\lambda(a) < \Lambda(t)$, but there are two or three solutions for $\lambda(b) \leq \Lambda(t) \leq \lambda(a)$.

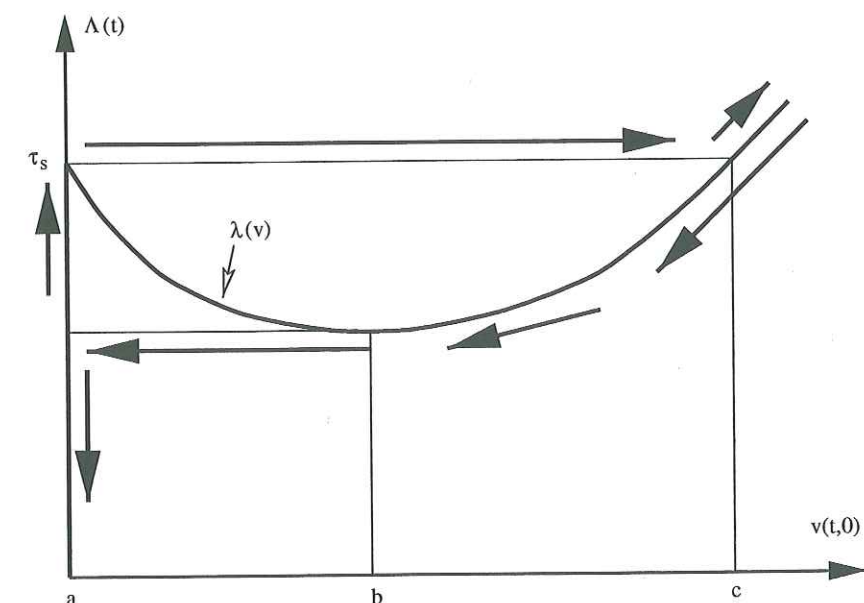


FIG. 1.11 – Solution of the rate dependent model assuming the perfect delay convention. The solution of the scalar equation $\lambda(v(t, 0)) = \Lambda(t)$ follows a path of hysteresis (with arrows) in the phase plane $(v(t, 0), \Lambda(t))$.

However, since the solution of the problem is not uniquely determined during the irregular behavior, we need a criterion to select the more appropriate physical solution between these three possibilities. Whatever selection rule is chosen to discriminate the solution, shocks will occur. A possible choice for this criterion is the "perfect delay" convention: the system only jumps when it has no other choice (see Ionescu & Paumier (1994) and Campillo et al. (1996)). In this way different paths of solutions are obtained in acceleration and deceleration processes and hysteresis occurs. Such a process is illustrated on Figure 1.11. Hence the physical solution $v(t, 0)$ represented on Figure 1.12 maximizes its interval of continuity. Madariaga & Cochard (1994) used these paths in the context of

two dimensional antiplane elastodynamics but they did not refer explicitly to the perfect delay convention as an additional criterion of choice. One consequence is that $v(t, 0)$ never follows the decreasing branch such that $\tau'_v(v(t, 0)) < -\sqrt{\rho\mu}$, i.e. $v(t, 0) \notin [a, b]$ (see again Figures 1.11 and 1.12).

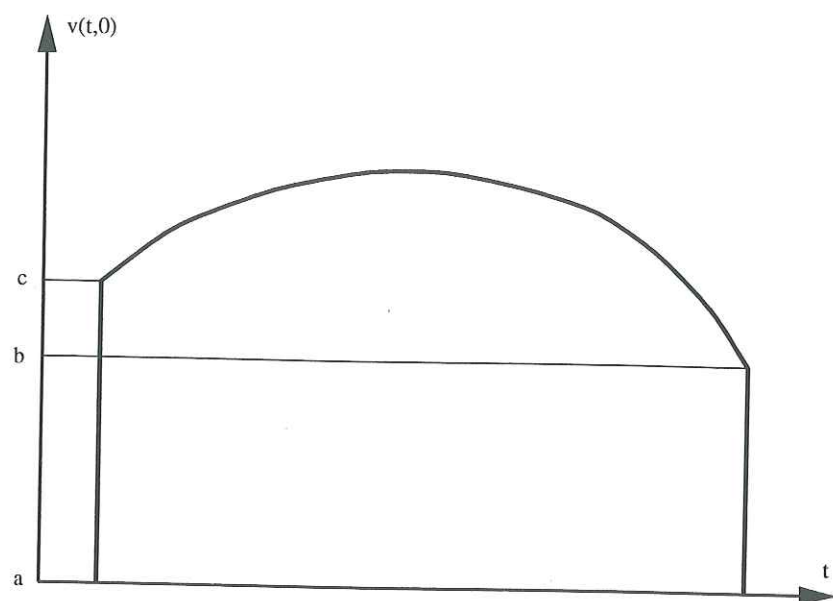


FIG. 1.12 – The sliding velocity of the rate dependent model, assuming the perfect delay convention, makes two jumps in the irregular case. The first one is from $v(t, 0) = a$ to $v(t, 0) = c$ and the second one is from $v(t, 0) = b$ to $v(t, 0) = a$

If we consider $\tau_v(v)$ defined by analogy with the Perrin et al. model by $\tau_v(v) = \tau_{ss}(v)$ (see equation (1.8)), then the irregular behavior is present if:

$$\sqrt{\rho\mu} < (B - A) \frac{V_\infty - V_0}{V_0 V_\infty} \quad (1.14)$$

As it follows from Ionescu & Paumier (1994), the perfect delay convention is *not* related to a simple energy criterion. One may notice that the delay criterion, which comes from the catastrophe theory (see for instance Poston & Stewart (1978)), is implicitly present in the analysis of many physical problems. Generally speaking it is used in the study of static or quasi-static problems (see Ionescu & Paumier (1996)) and it is justified by a dynamic stability analysis, that is the (static or quasi-static) position chosen by the perfect delay convention is always a stable position. The use of this criterion in our context, even if it is intuitively reasonable, has no justification because our study is already fully dynamic. We will see in the next section that this choice can be motivated by the analysis of a regularized rate dependent model.

Regularized Rate Dependent Model By taking into account the equations (1.11) and (1.6) we find the equations for the slip rate on the frictional interface $x = 0$ for all $t \in]0, T]$:

$$\begin{aligned} \tau(t, 0) &= \Lambda(t) \quad \text{for } v(t, 0) = 0 \text{ and } \Lambda(t) \leq \tau_s \\ \dot{v}(t, 0) &= \frac{\dot{\Lambda}(t) + K(v(t, 0))H[\Lambda(t) - \lambda(v(t, 0))]}{\sqrt{\rho\mu} + F(v(t, 0))} \quad \text{for } v(t, 0) > 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

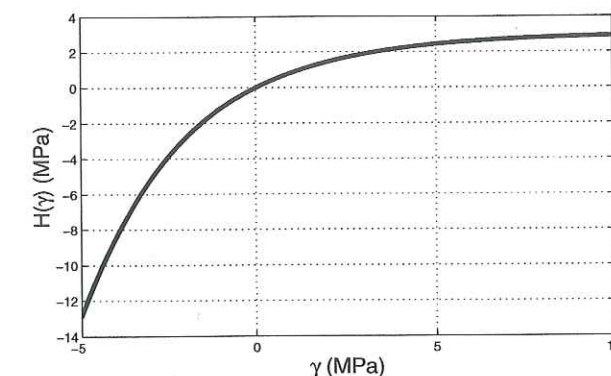
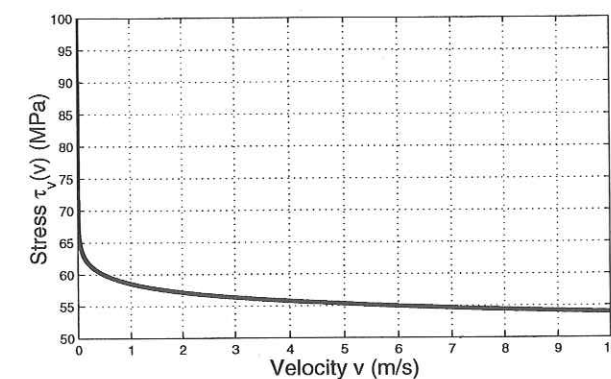


FIG. 1.13 – The rate and state friction law of Perrin et al. is mainly characterized by a rate dependent friction $\tau_v(v)$ and its function H that operates the regularization. We verify $H(0) = 0$ and $H'(0) = 1 > 0$. The numerical values are $V_0 = 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ms}^{-1}$, $V_\infty = 1.0 \cdot 10^9 \text{ms}^{-1}$, $\tau_s = 100 \text{MPa}$ and $B - A = 3 \text{MPa}$.

If we add to the first order differential equation (1.15) the initial condition $v(0,0) = v_0(0)$, we obtain a Cauchy problem which has a unique smooth solution. This implies that the regularized rate dependent model corresponds to a well-posed mathematical problem. It was not the same for the rate dependent model in the irregular behavior i.e. when the condition of non-uniqueness $\tau'_v(v(t,0)) < -\sqrt{\rho\mu}$ is verified.

In order to give a linear stability analysis of our problem let us consider a small initial perturbation $\tilde{v}_0, \tilde{\tau}_0$ of the steady sliding rigid motion. The slab slides uniformly at a constant velocity V . In this case the initial conditions read $v_0(x) = V + \tilde{v}_0(x)$, $\tau_0(x) = \tau_v(V) + \tilde{\tau}_0(x)$. By denoting $\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\tau}_0(v_s t) + \sqrt{\rho\mu}\tilde{v}_0(v_s t)$ we get $\Lambda(t) = \lambda(V) + \tilde{\Lambda}(t)$. If we put $v(t,0) = V + \tilde{v}(t)$ then from (1.15) we deduce:

$$\dot{\tilde{v}}(t) = f(\tilde{v}(t), \tilde{\Lambda}(t), \dot{\tilde{\Lambda}}(t)) \quad (1.16)$$

where

$$f(\tilde{v}, \tilde{\Lambda}, \dot{\tilde{\Lambda}}) = \frac{\dot{\tilde{\Lambda}} + K(V + \tilde{v})H[\lambda(V) + \tilde{\Lambda} - \lambda(V + \tilde{v})]}{\sqrt{\rho\mu} + F(V + \tilde{v})} \quad (1.17)$$

The first order instability condition reads $\partial_v f(0,0,0) > 0$ which is equivalent to $\lambda'(V) < 0$ or to $\tau'_v(V) < -\sqrt{\rho\mu}$.

As in the rate dependent model, if λ is decreasing on $[a, b]$ (see again Figure 1.11), the motion is an unstable rigid steady sliding for $V \in [a, b]$. We remark that if the solution of the rate dependent model is chosen by using the perfect delay convention, then the interval of non-existence $[a, b]$ for the rate dependent model corresponds to a domain of unstable evolution for the regularized rate dependent model.

Discussion. To illustrate our purpose, we perform a set of numerical simulations with the Perrin et al. (1995) formulas with parameters complying with the condition of instability (1.14). We recall that this choice of parameters corresponds to the condition of non-uniqueness in the first model (1.14). We perform a cycle of load in order to observe the whole path followed by the system i.e. a stick-slip-stick sequence. We take some initial conditions composed of the superposition of a static load τ_0^0 ($V = 0$ at the upper edge) and an arriving plane wave defined by its stress amplitude τ^0 and its period T_{load} . The initial condition corresponding to this load can be written $\tau_0(x) = \tau_0^0 + \frac{\tau^0}{2} \sin(\pi x / (v_s T_{load}))$ and $v_0(x) = \frac{\tau_0^0}{2\sqrt{\rho\mu}} \sin(\pi x / (v_s T_{load}))$, so that the load reads $\Lambda(t) = \tau_0^0 + \tau^0 \sin(\pi t / T_{load})$.

We recall here that h is large enough in order to play no role in this study. In all the simulations we take the following constant values: $\mu = 34.3 \text{ GPa}$, $\rho = 2800 \text{ kg.m}^{-3}$, $V_0 = 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$, $V_\infty = 1.0 \cdot 10^9 \text{ m.s}^{-1}$ (not cut off at great velocity), $\tau_s = 100 \text{ MPa}$, $\tau_0^0 = 0.9\tau_s$, $\tau^0 = 0.36\tau_s$, $T_{load} = 8 \text{ s}$.

In the previous sections we showed that the two models of friction give very different mathematical behaviors. Indeed the rate dependent model induces problems of non-uniqueness and discontinuities instead of the regularized rate dependent model which has a unique and continuous solution. But we have also seen that the domain of discontinuity of the velocity in the solution of the rate dependent model in the irregular case corresponds to the domain of (continuous) instability of the regularized rate dependent model. We now want to show how our intuitive choice of the perfect delay convention takes sense. In order to do that we study the limit solution of the regularized rate dependent model when $K(v) \rightarrow +\infty$ and we compare these results with the results of the

rate dependent model assuming the perfect delay convention. To this end we perform a series of numerical studies with the Perrin et al. formulas for $L = 1 \text{ m}$, 0.1 m and 0.01 m with $A = 0$ and $B = 2.3 \text{ MPa}$. The corresponding functions $\tau_v(v)$ and H of the Perrin et al. model are plotted on Figure 1.13. The results are presented on Figures 1.14 and 1.15. We observe that *the rate and state model converges exactly to the rate dependent model (i.e. the steady state model) solved with the perfect delay convention when $L \rightarrow 0$* . We can see precisely on the Figure 1.14 how the smooth jumps in the Perrin et al. model converge to the sharp jumps in the steady state one. Figure 1.15 illustrates the convergence of the path of the velocity $v(t,0)$ in the phase plane $(v(t,0), \Lambda(t))$.

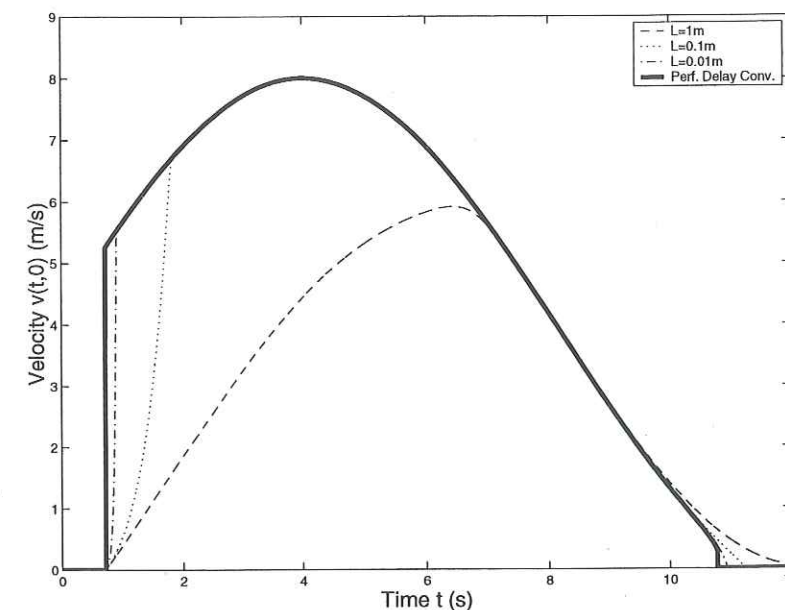


FIG. 1.14 – The plots of $v(t,0)$ for different values of L in the regularized rate dependent model using the Perrin et al. formulas. One observes the numerical convergence of the solution of the regularized rate dependent model to the solution of the rate dependent model assuming the perfect delay convention. For $L = 1 \text{ cm}$ the limit is already reached and the regular jumps look like discontinuities. The numerical values are $\mu = 34.3 \text{ GPa}$, $\rho = 2800 \text{ kg.m}^{-3}$, $V_0 = 1.0 \cdot 10^{-9} \text{ m.s}^{-1}$, $V_\infty = 1.0 \cdot 10^9 \text{ m.s}^{-1}$, $\tau_s = 100 \text{ MPa}$, $A = 0$, $B = 2.3 \text{ MPa}$, $\tau_0^0 = 0.9\tau_s$, $\tau^0 = 0.36\tau_s$ and $T_{load} = 8 \text{ s}$.

As we stated in the last section, the problem of non-uniqueness in the pure rate dependent model can not be solved in a classical way; another physical condition must be added to the formulation. We propose that taking the limit of a convenient well posed problem gives us the necessary constraint. Finally we observe that *taking the limit solution is identical to using the perfect delay convention as an additional condition*. It gives a signification to this criterion in dynamical problems. This very simple result has however a great importance since many fault models are mainly rate dependent and can not be solved in an ordinary way. Indeed, if one takes the initial problem statement, the scalar equation (1.12) is hidden. In the irregular case, this equation has many solutions and therefore it cannot be solved numerically without further constraints. Two behaviors are possible to face this problem. First, one may observe that pure rate dependent models are not compatible with elastodynamics and they must be abandoned. If experimental evidences require to use these models, one can introduce a rule of choice and a solution to the problem in which shocks exist. Those shocks can be the cause of problems in all resolutions in one or more dimensions. In our analysis we propose a way of solving it

exactly in the one dimensional case. It just requires the use of the characteristic line integration and the perfect delay convention. We show that the rate and state model can be considered as a regularization of the steady state model. The parameter L controls the regularization.

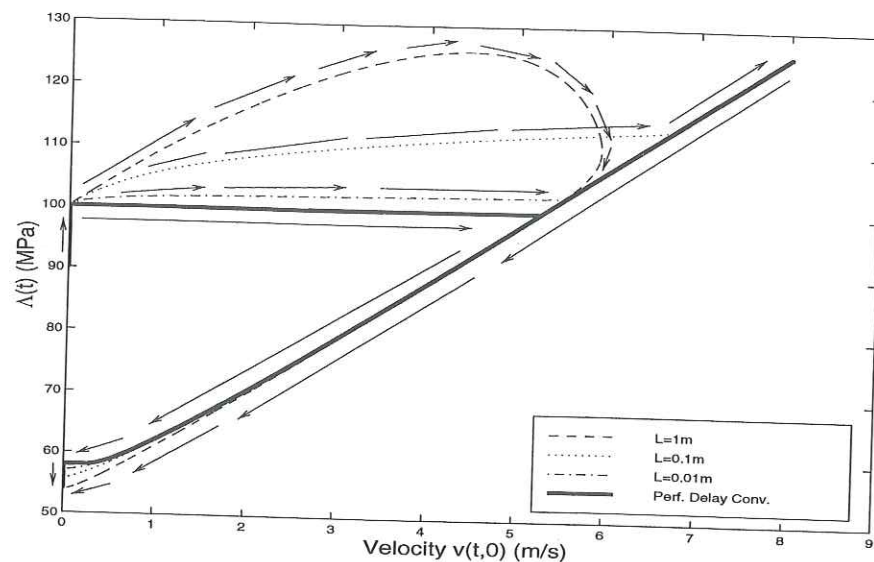


FIG. 1.15 – The plots of the trajectory in the phase plane $(v(t,0), \Lambda(t))$ for the simulations of the figure 1.14. One observes how the trajectory converges for small L to the trajectory of the rate dependent model assuming the perfect delay convention. The numerical values are $\mu = 34.3\text{GPa}$, $\rho = 2800\text{kg.m}^{-3}$, $V_0 = 1.0 \cdot 10^{-9}\text{ms}^{-1}$, $V_\infty = 1.0 \cdot 10^9\text{ms}^{-1}$, $\tau_s = 100\text{MPa}$, $A = 0$, $B = 2.3\text{MPa}$, $\tau_0^0 = 0.9\tau_s$, $\tau^0 = 0.36\tau_s$ and $T_{load} = 8\text{s}$.

In the experiments at constant velocity, Scholz (1990) interpreted L as the characteristic slip of the friction i.e. the slip that the stress needs to reach a new steady state value after a step of velocity. Our analysis shows that L can also be interpreted through its effect on the duration of the jumps. Indeed we can form L/V_0 to obtain a characteristic time. (See the dimensional analysis in Perrin et al. (1995)). In order to apply the above conclusion to cycles of loading as we do, we have to verify that the period of the cycle is much larger than the duration of the jumps (controlled by L). Indeed it is not obvious that in the case of a large number of cycles and a small initial noise one could really conclude that the dynamical non-linear evolution of a pure rate dependent model is still the limit of a regularized dependent one.

We now illustrate briefly the role of the parameters A and B of the rate and state model in the context of the slab. After our analysis it is clear that we shall study the roles of $B - A$ and A separately. Indeed $B - A$ appears in the function $\tau_{ss}(v)$ while A alone appears in the function $F(v)$. So we first make simulations in instability condition with: $L = 0.1\text{mm}$, $A = 0$ and $B - A = 0.1\text{MPa}$, 1MPa , 2.3MPa and 3MPa . The results are presented on Figure 1.16. Here we observe that $B - A$ only gives the size of the (continuous) jumps of the sliding velocity. We can remark that the second jump does not exist if $B - A$ exceeds a limit (see the curve $B - A = 3\text{MPa}$) because the load $\Lambda(t)$ does not decrease enough to reach the minimum of the function $\lambda(v)$. We must notice that this last result depends on the amplitude of the load $\Lambda(t)$.

To illustrate the role of A we do another simulation with $B - A = 2.3\text{MPa}$ and $A = 0, 0.1\text{MPa}, 1\text{MPa}, 2\text{MPa}$ and 3MPa . The results are presented on Figure 1.17. The role of A is to delay the first jump. Remark that A has no role on the second jump; this is

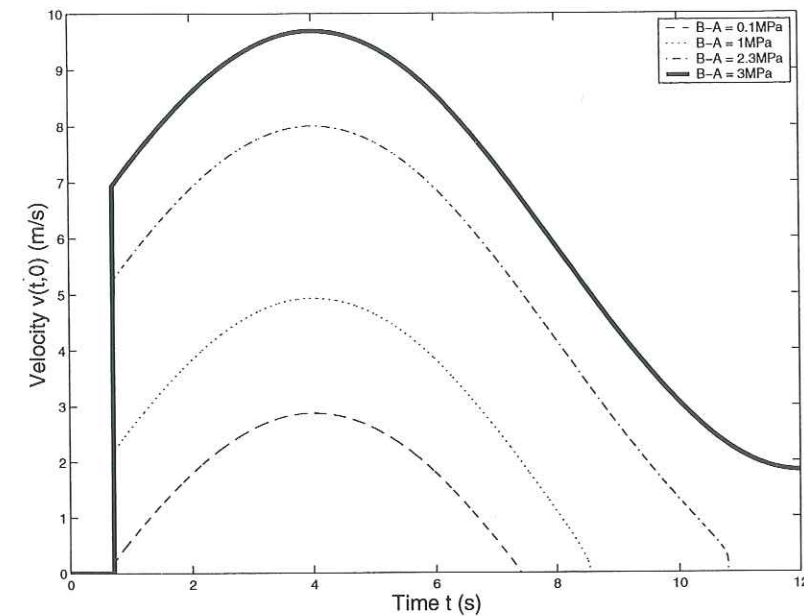


FIG. 1.16 – The effect of $B - A$ in the Perrin et al. (1995) model in the context of the slab. One observe that $B - A$ gives only the size and the existence of the two jumps of velocity. For great values of $B - A$ the second jump may disappear and consequently the system does not stick again. The numerical values are $\mu = 34.3\text{GPa}$, $\rho = 2800\text{kg.m}^{-3}$, $V_0 = 1.0 \cdot 10^{-9}\text{ms}^{-1}$, $V_\infty = 1.0 \cdot 10^9\text{ms}^{-1}$, $\tau_s = 100\text{MPa}$, $A = 0$, $L = 0.1\text{mm}$, $\tau_0^0 = 0.9\tau_s$, $\tau^0 = 0.36\tau_s$ and $T_{load} = 8\text{s}$.

reasonable because $F(v)$ is greater at low velocity in the rate and state formulas. Scholz (1990) interpreted A has an instantaneous effect of strengthening due to the velocity. We observe also that if A exceeds a limit (see the curve $A = 3\text{MPa}$), the instability does not develop anymore since the load has decreased before the instability (i.e. the first jump) has occurred. This effect depends on the type of load $\Lambda(t)$. Indeed the harmonic wave considered here loads the system but unloads it before the instability develops.

Conclusion We have studied two categories of friction law in the one dimensional case of a shearing slab. Our solution is based on the property of conservation along the characteristic lines. The problem of purely rate weakening friction exhibits non-uniqueness when the weakening rate is larger than a given value. In this case we need a criterion to choose the solution and we propose the perfect delay convention. The second category of friction law we consider are regularized rate dependent models, in which one finds as a particular case the classical rate and single state variable dependent models. We have found that the classical notion of stability in the second model is related to the notion of non-uniqueness in the corresponding first model. We have shown that when the characteristic slip $L \rightarrow 0$, the solution obtained with the regularized problem converges to that of the purely rate dependent model assuming the perfect delay convention. The perfect delay convention takes on a physical sense because it leads to a solution that is the limit of a regular problem. Those results are of interest in the understanding of fault models with rate dependent friction because they allow to solve explicitly the time discontinuities in one dimension, which is impossible with a classical computation. When the same problems of non-uniqueness appear in more general two or three dimensional fault models, the perfect delay convention could be an important element to use in numerical simulations. We performed a series of numerical experiments to test the sensitivity on the different parameters. The parameter L determines the duration of the velocity jumps and

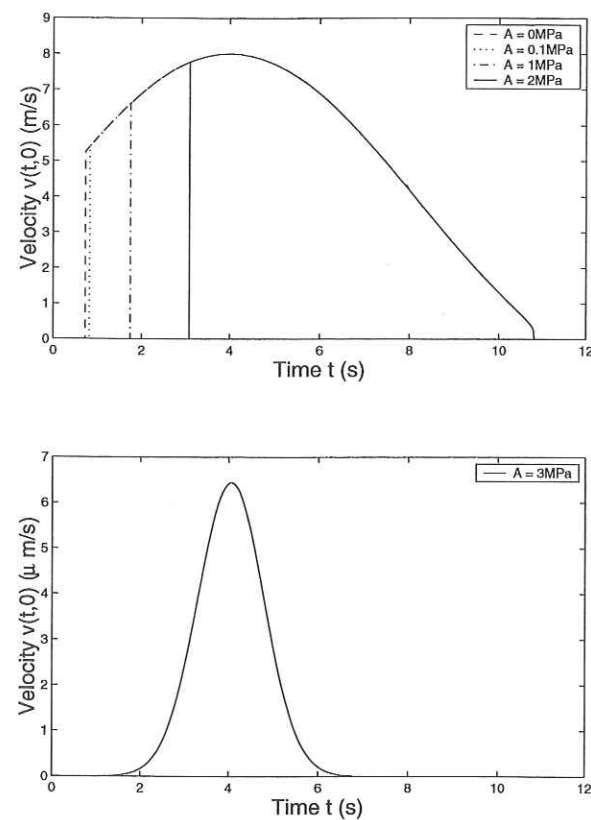


FIG. 1.17 – The effect of A in the Perrin et al. model in the context of the slab. One observes that A has a delaying effect for the instability. On the bottom figure, we see that large values of A may inhibit the instability phenomenon in the case of cycles of load. The numerical values are $\mu = 34.3\text{GPa}$, $\rho = 2800\text{kg.m}^{-3}$, $V_0 = 1.0 \cdot 10^{-9}\text{ms}^{-1}$, $V_\infty = 1.0 \cdot 10^9\text{ms}^{-1}$, $\tau_s = 100\text{MPa}$, $B - A = 2.3\text{MPa}$, $L = 0.1\text{mm}$, $\tau_0^0 = 0.9\tau_s$, $\tau^0 = 0.36\tau_s$ and $T_{load} = 8\text{s}$.

it appears that for $L = 10\mu\text{m}$ the duration is very small compared to the time scale of the total slip event (8s). The parameter $B - A$ directly gives the size of the velocity jump and the parameter A governs the delay before the instability.

Acknowledgments

We are grateful to R. Madariaga and J.P. Vilotte for their helpful comments on the manuscript.

Bibliography

- Burridge, R. & Knopoff, L., 1967.
Model and Theoretical Seismicity.
Bull. seism. Soc. Am., **57**, 341-371.
- Campillo, M., Ionescu, I.R., Paumier, J.-C. & Renard, Y., 1996.
On the Dynamic Sliding with Friction of a Rigid Block and of an Infinite Elastic Slab.
Phys. Earth planet. Inter., **96**, 15-23.
- Carlson, J.M. & Langer, J.S., 1989.
Mechanical Model of an Earthquake Fault.
Phys. Rev. A., **40**, 6470-6484.
- Chester, F.M., 1995.
Rheological Model for Wet Crust applied to Strike-Slip Faults.
J. Geophys. Res., **100**, 13033-13044.
- Dieterich, J.H., 1994.
A Constitutive Law for Rate of Earthquake Production and its Application to Earthquake Clustering.
J. Geophys. Res., **99**, 2601-2618.
- Gu, J.-C., Rice, J.R., Ruina, A.L. & Tse, S.T., 1984.
Slip Motion of a Single Degree of Freedom Elastic System with Rate and State Dependent Friction.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **32**, 167-196.
- Ionescu, I.R. & Paumier, J.-C., 1994.
On the Contact Problem with Slip Rate Dependent Friction in Elastodynamics.
Eur. J. Mech. A/Solids, **13**, 555-568.
- Ionescu, I.R. & Paumier, J.-C., 1996.
On the Contact Problem with Slip Displacement Dependent Friction in Elastostatics.
Int. J. Engng Sci., **34**, 471-491.
- Madariaga, R. & Cochard, A., 1994.
Seismic Source Dynamics, Heterogeneity and Friction.
Annali di Geofisica, **XXXVII**, 1349-1375.
- Perrin, G., Rice, J.R. & Zheng, G., 1995.
Self-Healing Slip Pulse on a Frictional Surface.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **43**, 1461-1495.
- Poston, T. & Stewart, I., 1978.
Catastrophe Theory and its applications.
Pitman, London.
- Rice, J.R. & Ruina, A.L., 1983.
Stability of Steady Frictional Slipping.
Journal of Applied Mechanics, **50**, 343-349.

Ruina, A.L., 1983.

Slip Instability and State Variable Friction Laws.

J. Geophys. Res., **88**, 10359-10370.

Scholz, C.H., 1990.

The Mechanics of Earthquakes and Faulting.

Cambridge University Press.

Chapitre 2

ASPECTS THEORIQUES DE L'INITIATION BIDIMENSIONNELLE.

Ici nous exposons les résultats obtenus pour l'initiation bidimensionnelle sur une faille ou une fissure rectiligne en élastodynamique et soumise à une loi de frottement affaiblissante, exprimée en fonction du glissement. Par taux d'affaiblissement, nous entendons l'opposé de la dérivée de la loi de frottement par rapport au glissement. C'est la pente de la loi de frottement. Parfois, lorsque la distinction n'est pas fondamentale (lorsque la contrainte normale reste constante ce qui est la majorité de nos cas), le taux d'affaiblissement désignera par abus de langage l'opposé de la dérivée par rapport au glissement de la résistance au cisaillement.

Dans la première section nous présentons l'initiation libre. Dans ce cas, la faille est infinie et l'interface ne comporte aucune barrière. Dans le cas où le taux d'affaiblissement est constant, ce type de modèle présente trois caractéristiques physiques essentielles: une longueur de faille caractéristique où se développe l'instabilité (patch instable), un taux de croissance temporel exponentiel et une évanescence spatiale exponentielle du glissement. Toutes les grandeurs qui guident cette évolution découlent des grandeurs élastodynamiques et du taux d'affaiblissement. Ce comportement peut être justifié par une analyse des modes propres ou "analyse spectrale". En outre, le glissement peut être approché de manière précise par l'approximation de partie dominante, qui repose sur cette analyse spectrale. Nous exposerons successivement les résultats en cisaillement antiplan (mode III), obtenus par Campillo & Ionescu (1997) et en cisaillement plan (mode II), obtenus par Favreau et al. (1999). Enfin nous exposerons plus succinctement l'extension de la méthode au mode d'ouverture (mode I). Lorsque la loi de frottement comporte un taux d'affaiblissement variable, qui augmente avec le glissement (voir Ionescu & Campillo (1999)), nous montrons que le temps d'initiation ne dépend pas du taux moyen mais du taux initial. En effet c'est au départ du glissement que le système passe le plus de temps dans le régime d'initiation. Ainsi, avec des lois de frottement avec affaiblissement non-linéaire, on peut obtenir des temps d'initiation longs, sans modifier la valeur du glissement critique.

Le modèle d'initiation sur une faille infinie est un modèle peu réaliste à première vue. Cependant son étude a permis d'identifier un processus simple, non radiatif, et ayant la propriété de laisser un temps de latence non négligeable entre une petite perturbation de l'équilibre et la rupture propagative, radiative, de type crack. De plus, ce temps de latence peut-être arbitrairement allongé, grâce à la non-linéarité de l'affaiblissement. Dans la deuxième section, nous montrons comment le confinement du glissement dans une faille

finie peut aussi influencer le temps d'initiation. Tout d'abord, la faille finie possède une condition de stabilité: la faille n'est instable que lorsque le produit de sa longueur par son taux d'affaiblissement est assez grand. Lorsque c'est le cas, et comme le spectre des valeurs propres est discret, le glissement instable est principalement porté par le mode propre ayant la plus grande valeur propre positive. Ainsi, on peut synthétiser le comportement d'une faille finie instable par ce mode propre noté (λ_0, Φ_0) . Sa valeur propre λ_0 dépend de manière croissante du produit de la longueur de la faille par le taux d'affaiblissement. Sa fonction propre Φ_0 se localise spectaculairement autour de la faille lorsque λ_0 augmente. Les comportements de la faille finie antiplane instable ont été décrits numériquement par Ionescu & Campillo (1999) (loin de la stabilité) et analytiquement par Dascalu et al. (2000) (proche de la stabilité). Grâce à un autre développement analytique, nous pouvons recouper plus facilement une partie des résultats analytiques et numériques.

La résolution d'un problème mettant en jeu des instabilités en élastodynamique est souvent ardue. Dans ce chapitre et dans le suivant (problèmes tridimensionnels), nous montrons qu'il existe une approximation de la solution du glissement en initiation: la partie dominante. Cette simplification naturelle de la solution reste assez technique dans son utilisation. La question qui se pose dans cette troisième section est: "Existe-t-il d'autres approximations valables et économiques?" (économiques en calculs). Il existe une approximation qui a été couramment utilisée, par exemple dans les premières modélisations de cycle sismique par Rice (1993): l'approximation quasi-dynamique. Nous allons caractériser et justifier son biais par rapport à l'élastodynamique complète dans les problèmes d'initiation antiplane.

Dans la quatrième et dernière section nous envisageons la situation où les matériaux sont différents de part de d'autre de la faille ou de la fissure. Par exemple, une faille ayant eu un rejet de plusieurs centaines de kilomètres peut mettre deux matériaux très différents en vis à vis. Lorsque ces matériaux ont des caractéristiques physiques (élasticité et masse volumique) différentes, alors la perte de symétrie peut changer la nature du processus d'initiation. Ici nous présentons une partie de la phénoménologie dans deux cas très différents. D'une part dans le cas antiplan, où la contrainte normale ne varie pas, le problème reste bien posé et nous proposons une solution de partie dominante. D'autre part dans le cas plan, où la contrainte normale varie, le problème peut être mal posé et nous ne pouvons qu'illustrer quelques effets, peu notables dans le régime d'initiation, mais assez spectaculaires dans le régime de propagation au travers d'une barrière.

2.1 Initiation libre sur une faille infinie.

2.1.1 Initiation d'une instabilité de cisaillement dans le cas antiplan avec une loi de frottement dépendante du glissement.

Dans ce cas nous rappelons les résultats obtenus par Campillo & Ionescu (1997) pour le cas d'un affaiblissement linéaire et Ionescu & Campillo (1999) dans le cas d'un affaiblissement non-linéaire. La géométrie antiplane est décrite sur la figure 2.1. Le déplacement w et la vitesse $v = \frac{\partial w}{\partial t}$ sont portées par la direction z et sont des fonctions du temps t et des coordonnées x et y . La faille se situe en $y = 0$. Le corps élastique est homogène. Notons ρ sa densité, v_s la vitesse des ondes de cisaillement (dites S) et $G = \rho v_s^2$ le module de cisaillement. L'équation régissant le mouvement dans cette géométrie est l'équation des ondes bidimensionnelle (2.1):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x, y) = v_s^2 \nabla^2 w(t, x, y) \quad x \in \mathbb{R}, y \neq 0, t > 0 \quad (2.1)$$

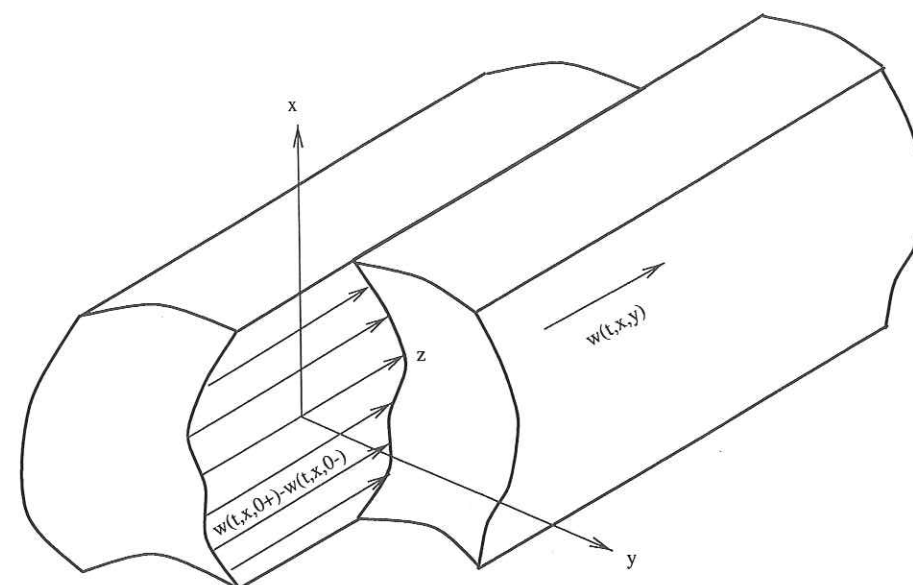


FIG. 2.1 – La géométrie antiplane ou mode III: le glissement et la propagation se font dans deux directions perpendiculaires. Notations.

Nous notons $-S, S > 0$ la contrainte normale (constante) sur le plan de faille. Notons $\delta w(t, x) = w(t, x, 0^+) - w(t, x, 0^-)$ le glissement relatif et $\delta v(t, x) = v(t, x, 0^+) - v(t, x, 0^-)$ la vitesse de glissement relative. Notons enfin $\mu(x, \delta w)$ le coefficient de frottement dépendant du glissement. Rappelons la formulation de la condition de frottement à l'interface $y = 0$, valable à tout instant t et en tout point de la faille x :

$$\sigma_{yz}(t, x, 0) = S\mu(x, \delta w(t, x)) \text{sign}(\delta v(t, x)) \text{ pour } \delta v(t, x) \neq 0 \quad (2.2)$$

$$|\sigma_{yz}(t, x, 0)| \leq \mu(x, \delta w(t, x))S \text{ pour } \delta v(t, x) = 0 \quad (2.3)$$

où $\sigma_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y}$ est la contrainte de cisaillement agissant sur le plan de faille. Elle est continue en $y = 0$.

Nous notons aussi $\alpha = -\frac{S}{G}\mu'$ le taux d'affaiblissement de la résistance divisé par le module de cisaillement. Dans cette expression, $\mu' = 2 \frac{\partial \mu}{\partial \delta w}$ est la dérivée de la loi de frottement par rapport au demi glissement. La quantité α a la dimension d'un inverse d'une longueur. Les lois de frottement homogènes particulières utilisées dans cette section sont représentées sur la figure 2.2. Leur expression est:

$$\mu(\delta w) = \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{2L_c} \left(\delta w - \frac{L_c}{\pi} \xi \sin \frac{\pi \delta w}{L_c} \right) \text{ pour } \delta w \leq 2L_c \quad (2.4)$$

$$\mu(\delta w) = \mu_d \text{ pour } \delta w > 2L_c \quad (2.5)$$

Les lois de frottement définies par (2.4) et (2.5) sont des idéalizations des lois de frottement obtenues par Ohnaka et al. (1987). Les paramètres μ_s et μ_d sont les coefficients de frottement statique et dynamique. Ainsi $\sigma_s = S\mu_s$ et $\sigma_d = S\mu_d$ représentent les résistances statique et dynamique correspondantes. $2L_c$ est le glissement critique. ξ est un paramètre permettant de faire varier la forme de la loi de frottement. La partie affaiblissante ($\delta w \leq 2L_c$) est composée d'une évolution globale linéaire avec une évolution de détail en arche de sinus, ce qui permet d'obtenir un taux d'affaiblissement initial différent du taux d'affaiblissement moyen. Calculons ce taux:

$$\alpha(\delta w) = \frac{S(\mu_s - \mu_d)}{GL_c} \left(1 - \xi \cos \frac{\pi \delta w}{L_c} \right) \text{ pour } \delta w \leq 2L_c \quad (2.6)$$

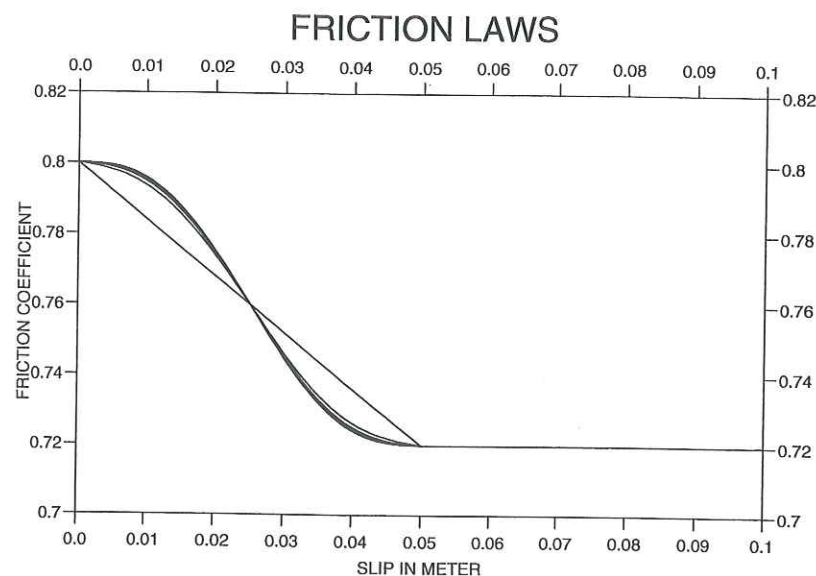


FIG. 2.2 – Les lois de frottement dépendantes du glissement, d'après Ionescu & Campillo (1999). Elles sont composées d'une partie affaiblissante modulable et d'un seuil dynamique constant, qui est atteint lorsque le glissement dépasse le glissement critique ($\delta w > 2L_c$).

Nous commençons par étudier le cas où l'affaiblissement est linéaire, c'est à dire $\xi = 0$ dans (2.4) et (2.6), ce qui nous donne:

$$\mu(\delta w) = \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{2L_c} \delta w \text{ pour } \delta w \leq 2L_c \quad (2.7)$$

$$\alpha = \alpha_c = \frac{S(\mu_s - \mu_d)}{GL_c} \text{ pour } \delta w \leq 2L_c \quad (2.8)$$

Le problème de l'initiation infinie dans le cas d'un affaiblissement linéaire est maintenant presque posé. Pour cela, il suffit d'ajouter que le système est dans un équilibre instable, tel que l'état de contrainte initial est partout égal à la résistance statique, à savoir $\sigma_{yz}(0, x, y) = \sigma_s$. En appliquant une petite perturbation initiale sur le déplacement $w(0, x, y) = w_0(x, y)$ ou sur la vitesse $v(0, x, y) = w_1(x, y)$ alors on observe une évolution instable du glissement. Cette évolution instable a été simulée par les différences finies en temps (figure 2.3).

La simulation de la figure 2.3 suggère que la phase d'initiation est une phase non radiative mais instable, où s'amorce le glissement. On peut distinguer la propagation de la perturbation le long du cône de causalité. Après une certaine distance de propagation de la perturbation, on voit la phase d'initiation, non propagative, qui s'insère dans ce cône. Ensuite l'initiation se développe pendant un certain temps et crée un délai entre la perturbation et la phase de crack (phase radiative et génératrice des mouvements forts).

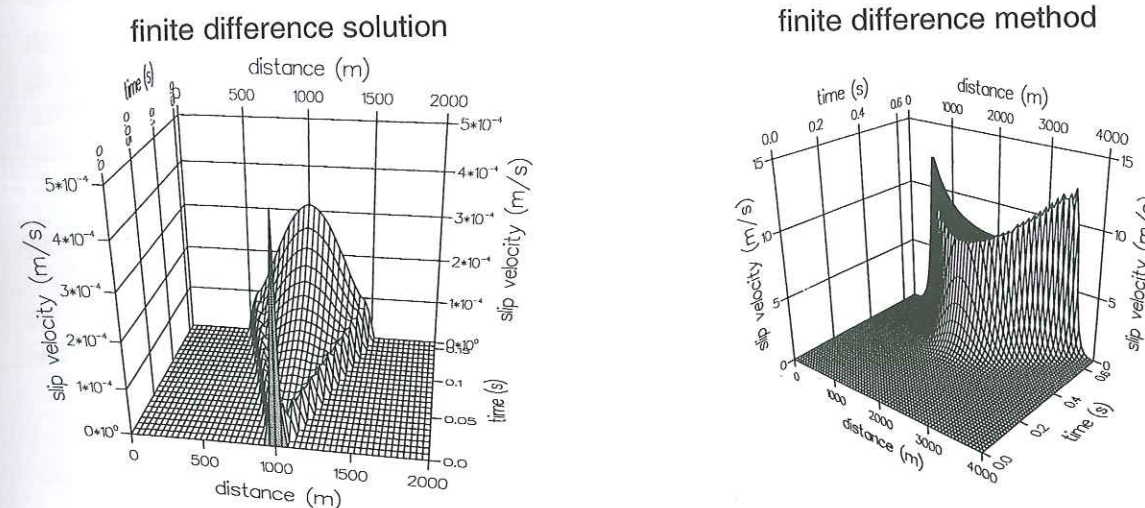


FIG. 2.3 – Le processus instable sur la faille infinie, calculé par une méthode de différences finies d'après Campillo & Ionescu (1997). A gauche: le processus d'initiation. A droite: la fin du processus d'initiation et le début de la phase de crack. Ici les valeurs numériques sont: $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3000 \text{ m s}^{-1}$, $L_c = 0.05 \text{ m}$ et $\sigma_s - \sigma_d = 12 \text{ MPa}$. La perturbation initiale sur la vitesse a une amplitude maximale de 0.0001 m s^{-1} et une extension caractéristique de 100 m .

L'initiation correspond à la phase où tous les points de la faille subissent l'affaiblissement ($\delta w \leq 2L_c$). Dès qu'un point de la faille dépasse le glissement critique, le crack est créé et il se propage.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'initiation plus théoriquement. Puisque cette phase correspond, ici, à un affaiblissement homogène, nous effectuons une linéarisation de la condition de frottement. Aussi, vu que les deux milieux sont identiques de part et d'autre de la faille, le glissement est anti-symétrique, $w(t, x, -y) = w(t, x, y)$ et on ne considère que le mouvement dans le demi-espace supérieur $y > 0$. Ainsi, nous posons le problème de l'initiation infinie homogène linéarisée antiplane, déclenchée par une perturbation des conditions initiales:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x, y) = v_s^2 \nabla^2 w(t, x, y) \quad x \in \mathbb{R}, y > 0, t > 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(t, x, 0^+) = -\alpha_c w(t, x, 0^+) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \text{ et } w(t, x, 0^+) < L_c \quad (2.10)$$

$$w(0, x, y) = w_0(0, x, y) \text{ et } v(0, x, y) = w_1(0, x, y) \quad x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (2.11)$$

Ce problème peut être déterminé analytiquement (voir Campillo & Ionescu (1997)). Cependant son étude spectrale en temps montre qu'il existe des modes propres dont la valeur propre a un carré positif. Ces modes propres vont nous permettre de définir une approximation appelée *partie dominante*. Le problème aux valeurs propres est posé ainsi:

$$\lambda^2 w^\lambda(x, y) = v_s^2 \nabla^2 w^\lambda(x, y) \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial w^\lambda}{\partial y}(x, 0^+) = -\alpha_c w^\lambda(x, 0^+) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

La condition $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ est une déduction de considérations énergétiques. En effet, la

condition limite sur la faille ne fait pas intervenir les dérivées temporelles. Une justification plus détaillée est fournie dans l'analyse du problème plan. Par ailleurs, les fonctions propres dont la valeur propre est de carré positif ($\lambda^2 \geq 0$) forment un spectre continu et borné. Elles s'écrivent:

$$w^\lambda(x, y) = e^{-\alpha_c y \pm i x \sqrt{\alpha_c^2 - \frac{\lambda^2}{v_s^2}}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \lambda^2 \leq (v_s \alpha_c)^2, x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (2.14)$$

La partie dominante de la solution correspond à la partie de la solution qui ne contient que les modes instables définis par (2.14). Elle s'écrit en fonction de la perturbation initiale, considérée comme condition initiale du problème:

$$x \in \mathbb{R}, y > 0, t > 0: \quad w^d(t, x, y) = \frac{\alpha_c}{\pi} e^{-\alpha_c y} \int_{-\alpha_c}^{\alpha_c} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha_c s + i k(x-u)} \left(\text{ch}(v_s t \sqrt{\alpha_c^2 - k^2}) w_0(u, s) + \frac{\text{sh}(v_s t \sqrt{\alpha_c^2 - k^2})}{v_s \sqrt{\alpha_c^2 - k^2}} w_1(u, s) \right) du ds dk \quad (2.15)$$

Sur la figure 2.4, nous testons l'approximation analytique de partie dominante, donnée par 2.15, en la comparant avec la solution complète simulée en différences finies. L'accord est très bon. On peut cependant noter la non-causalité de la partie dominante suivant x . Ceci est dû à son spectre tronqué en k sur le domaine $[-\alpha_c, \alpha_c]$. Il est aussi aisé de vérifier que la partie dominante n'est pas causale suivant y puisqu'elle décroît en $e^{-\alpha_c y}$.

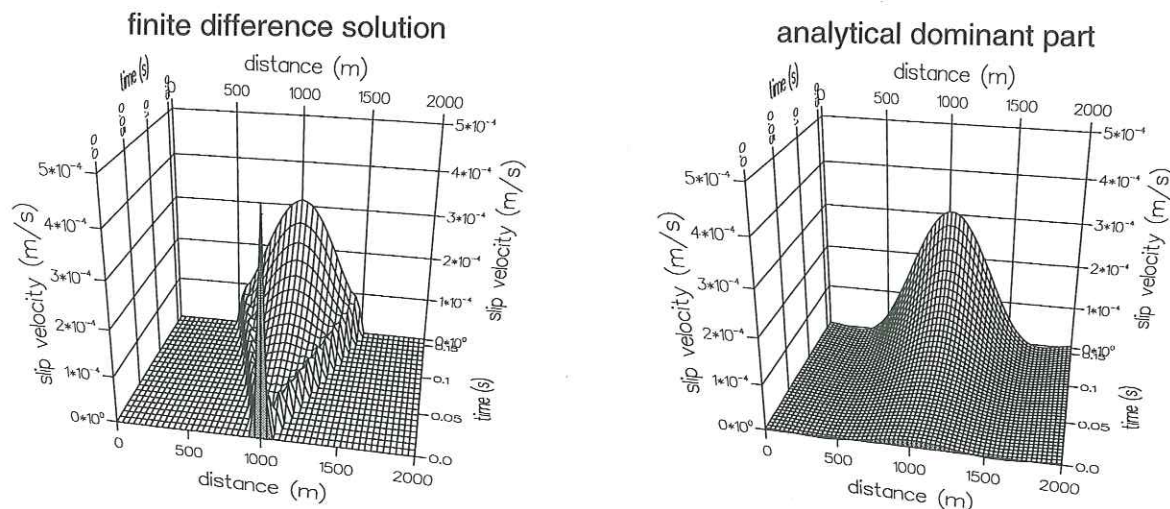


FIG. 2.4 – La comparaison entre la solution complète en différences finies (à gauche) et la partie dominante (à droite), d'après Campillo & Ionescu (1997). On observe la non causalité naturelle de la partie dominante du fait de son spectre tronqué. Ici les valeurs numériques sont: $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3000 \text{ ms}^{-1}$, $L_c = 0.05 \text{ m}$ et $\sigma_s - \sigma_d = 12 \text{ MPa}$. La perturbation initiale sur la vitesse a une amplitude maximale de 0.0001 ms^{-1} et une extension caractéristique de 100 m .

Grâce à la partie dominante, on peut résumer les principales caractéristiques du glissement de l'initiation antiplane homogène linéaire en trois points: En x , le glissement se développe de manière instable sur un patch de longueur $l_c = \pi/\alpha_c$, qui correspond à

la coupure spectrale en $|k| = \alpha_c$, au delà de laquelle il n'existe plus de valeur propre en temps de carré positif. En y , le glissement décroît exponentiellement de la faille en $e^{-\alpha_c y}$. Enfin en t , le glissement croît exponentiellement en temps sur un spectre de valeurs propres continu telles que $0 < \lambda^2 < (v_s \alpha_c)^2$. La plus grande de ces valeurs propres $\lambda = v_s \alpha_c$ tend à dominer les autres et, grâce à cela, il est possible de donner une approximation du temps d'initiation nécessaire pour que le glissement atteigne localement la valeur critique $2L_c$. Pour une perturbation qui s'étend spatialement sur $[-a, a] \times [b, +\infty[$, $b > 0$, Il est donné par:

$$T_c \approx \frac{b}{v_s} + \frac{1}{v_s \alpha_c} \ln \left(\frac{\pi L_c}{2a(W_0 \alpha_c + W_1/v_s)} \right) \quad (2.16)$$

où les poids W_0 et W_1 représentent des sortes de valeur moyenne de la perturbation:

$$W_0 = \frac{\alpha_c}{2a} \int_{-a}^a \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_c y} w_0(x, y + b) dx dy$$

Ce temps d'initiation est inversement proportionnel à $v_s \alpha_c$ et dépend du logarithme de l'amplitude de la perturbation et du logarithme du glissement critique. Ainsi le temps d'initiation dépend directement du taux d'affaiblissement α_c mais ne dépend que des ordres de grandeur de la perturbation et du demi glissement critique L_c .

Lorsque l'affaiblissement est non linéaire en déplacement, autrement dit $\xi \neq 0$ dans (2.4), il n'est plus possible de faire une analyse linéarisée valable pour toute la phase d'initiation. Cependant on peut supposer que, puisque la majeure partie du temps d'initiation est due au commencement du processus, alors le paramètre principal qui va jouer est le taux d'affaiblissement initial $\alpha(\delta w = 0)$. Ce problème a été étudié par Ionescu & Campillo (1999) dans le cas d'une faille infinie homogène, avec une loi de frottement qui admet un taux d'affaiblissement initial plus faible que le taux moyen (revenir à la figure 2.2). Le départ de chacune de ces lois est zoomé sur la figure 2.5. Toujours sur cette même figure, on reporte l'évolution de la vitesse de glissement en fonction du temps pour chacun des taux d'affaiblissement initiaux. On remarque alors que le temps d'initiation croît en proportion inverse du taux d'affaiblissement initial. Par cette étude, on montre en fait que ce ne sont pas les mêmes paramètres qui intéressent la propagation de la rupture d'une part et l'initiation d'autre part. Pour l'initiation, ce sont plus particulièrement les détails du comportement au commencement de l'instabilité, c'est à dire lors des petits glissements.

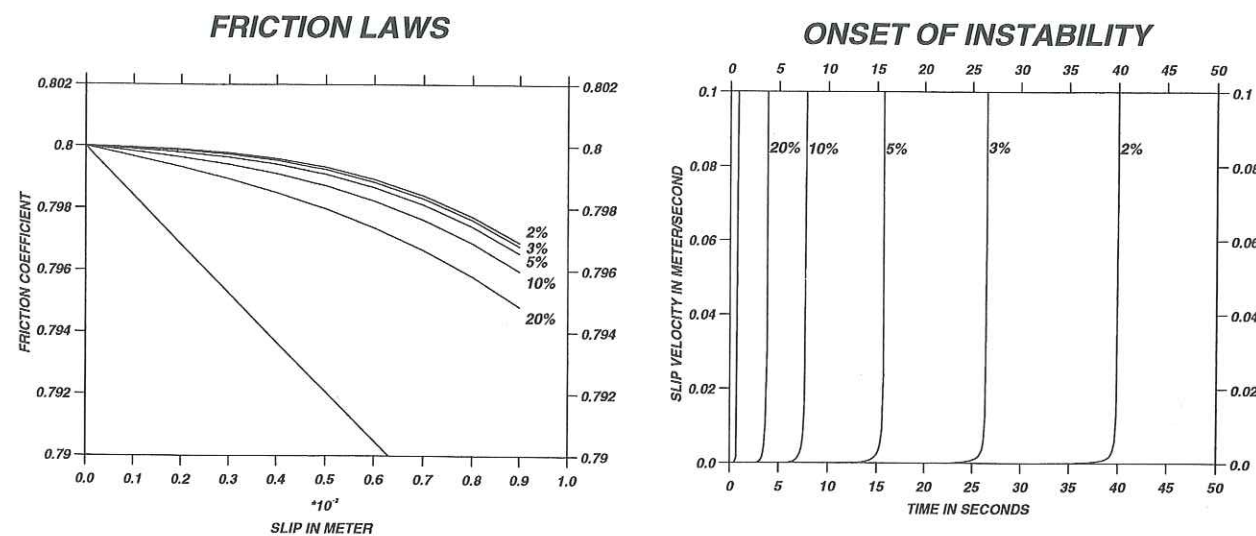


FIG. 2.5 – L'influence du taux d'affaiblissement initial sur le temps d'initiation. A gauche: le zoom sur le départ des lois de frottement. A droite, le temps d'initiation correspondant, d'après Ionescu & Campillo (1999). Le temps d'initiation croît en proportion inverse du taux d'affaiblissement initial.

2.1.2 Initiation d'une cisaillement de cisaillement dans le cas plan avec une loi dépendante du glissement.

Dans la partie précédente de formaliser le modèle d'initiation dans le cas antiplan, qui est un cas où l'élasticité complète (avec le couplage des ondes P et S) est inévitable prise en compte. C'est la raison pour laquelle nous avons formalisé dans le cas plan. Comme l'opérateur de bord ne commute plus avec les ondes, la méthode utilisée par Campillo & Ionescu (1997) dans le cas valable. Pour surmonter cette difficulté et pour déterminer la partie utilisons une méthode plus classique de projection normalisée des courbes pour les modes propres. Ici les modes propres sont des solutions planes de la décomposition. La décomposition en ondes planes a été introduite en sismologie par (1989), dans le cas de solides élastiques sans masse et de lois de frottement. Bien que complexe au premier abord, le problème que nous abordons des caractéristiques simples.

Initiation of Inplane shear under Slip Dependent Friction

Pascal Favpillo and Ioan R. Campillo and Ioan R. Ionescu

Bulletin of the Seismological Society of America 89, 1280-1295, 1999

Résumé. Nous étudions l'instabilité élastodynamique de cisaillement plan, homogène, avec une dépendance du glissement. Nous supposons une dépendance linéaire de la friction au début du glissement et nous faisons une analyse de valeur propre du temps. Nous prouvons qu'il existe deux types de valeurs propres. Avec le premier type, les valeurs propres ont un carré négatif et représentent la "partie dominante" de la solution. Avec le second type, les valeurs propres ont un carré positif et représentent la "partie dominante" de la solution. Nous utilisons une méthode classique de formalisation des fonctions propres pour donner l'expression analytique de la solution. Cette analyse montre que la réponse de la partie dominante sur un spectre continu mais borné. Cette borne dépend de l'affaiblissement et d'un coefficient faisant intervenir le rapport des vitesses des ondes. Nous montrons aussi que la croissance exponentielle est directement liée à la vitesse des ondes S. En utilisant l'expression de la partie dominante nous estimons le temps d'initiation nécessaire au crack pour la propagation stationnaire. Nous faisons des tests numériques avec des références finies et nous montrons le très bon accord entre la partie dominante analytique et la solution complète numérique. Finalement, dans notre contrainte initiale est égal à la résistance statique, nous étudions la propagation et nous observons que les pointes du crack voyagent asymptotiquement des P, après un court instant de vitesse apparente P-supersonique. Les résultats montrent que la description dynamique linéarisée est encore valable de crack dans le régime de propagation.

Abstract. We study the stable homogeneous elastodynamic inplane shear process under slip-weakening. We assume a linear dependency of the friction at the beginning of the slip. Eigenvalue analysis in the time domain. We prove that two types of eigenvalues. With the first type, the eigenvalues have

a negative square and represent the "wave part" of the solution. With the second type, they have a positive square and lead to the "dominant part" of the solution. We use a classical method based on the normalization of the dominant eigenfunctions in order to give the analytical expression of the dominant part of the solution. This analysis shows that the response of the dominant part will develop on a continuous but limited spectral domain. This limit depends on the weakening of the friction and a coefficient including the ratio of P wave velocity to S wave velocity. We also show that the exponential growth of the dominant part is directly linked to the weakening and the S wave velocity. Using the expression of the dominant part, we give an estimation of the time of initiation for the crack to reach the steady propagation stage. We perform numerical tests with a finite difference method and show very good agreement between the analytical dominant part of the solution and the complete numerical solution. Finally, in our case where the initial stress is equal to the static admissible load, we study the crack propagation and observe that the crack tips travel asymptotically at P wave velocity after a short time of apparent P supersonic velocity. The numerical results show that the linearized dynamic description is also valid ahead the crack tips in the propagation regime.

Introduction The initiation stage in dynamic faulting is now considered as a key process in earthquake studies. Perhaps the short time prediction of earthquakes depends on our understanding of this initiation. Ohnaka et al. (1987) and Ohnaka (1996) show in their laboratory experiments that the frictional conditions on the fault during the initiation process can be simply modeled by a slip dependent friction. Matsu'ura et al. (1992) and Shibazaki & Matsu'ura (1992) proposed a numerical model of earthquake nucleation derived from these experiments. They studied the slip on a specific heterogeneous fault with an external loading. Our goal here is to study separately the dynamic and unstable initiation of the slip at a constant load. This phase takes place between the quasi-static process (where the fault is stable and where the tectonic load is the time scale) and the crack-type propagation (where the waves give the time scale). Campillo & Ionescu (1997) studied theoretically the dynamic evolution of the initiation stage due to a linearized slip weakening friction in the antiplane case. They calculated an analytical solution for the homogeneous case and they also gave the time of initiation and the critical length of the perturbations that are able to develop an instability. To complete this work, Ionescu & Campillo (1999) studied the role of the finiteness of the weak zone on the time of initiation. In the present paper we study the initiation under an homogeneous linearized slip weakening friction in the inplane case. Since the method developed by Campillo & Ionescu (1997) for calculating the "dominant part" of the solution does not apply in the inplane case, we use another method based on the determination of the eigenfunctions and the calculation of their norm. Finally we present a quasi-explicit analytical formula of the dominant part. We say quasi-explicit because the formulation needs the numerical calculation of the roots of a high order polynomial function. Once this little difficulty is solved, one can calculate a theoretical solution. From this analysis we give the main features of the initiation and we compare them to the antiplane case. We also perform some simulations with a finite difference method in order to validate our theoretical expression for the dominant part. Finally we study the propagation phase of the crack with the finite difference simulations and we find that our linearized approach describes well the stress and velocity fields ahead the crack tips when the admissible static stress is reached everywhere on a large zone of the fault.

Problem Statement We consider the inplane shearing of two homogeneous half-spaces bounded by the plane Γ_f at $y = 0$ (see Figure 2.6). The half-spaces are in contact with

slip dependent friction. We assume that the displacement field is 0 in the direction z and we suppose that all our descriptive functions (displacement, stress and velocity) do not depend on z . The elastic medium has the density ρ and the two wave velocities v_p for P waves and v_s for S waves. The corresponding first Lamé coefficient is $\rho(v_p^2 - 2v_s^2)$ and the second one (the shear modulus) is ρv_s^2 .

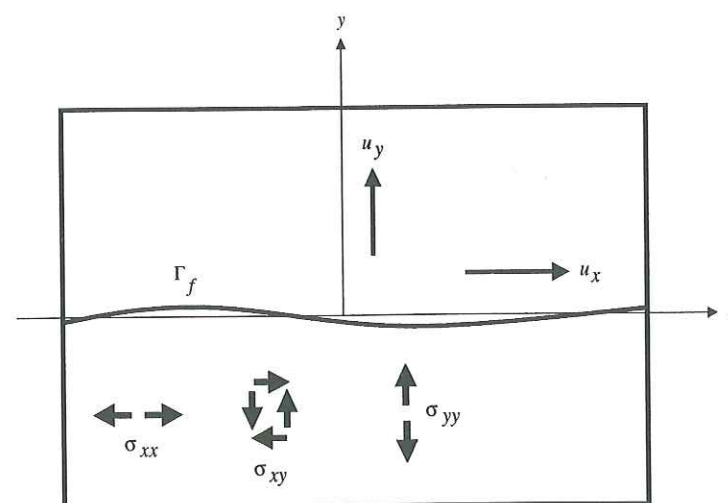


FIG. 2.6 – The inplane problem. Notations.

By $\Phi(t, x, y)$ and $\Psi(t, x, y)$, we denote the Helmholtz potentials (corresponding to P and S waves), i.e. the displacement u_x, u_y and the stress $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ fields can be written:

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (2.17)$$

$$u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$\sigma_{xx} = \rho v_p^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \rho(v_p^2 - 2v_s^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2\rho v_s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \sigma_{xx}^\infty, \quad (2.19)$$

$$\sigma_{xy} = \rho v_s^2 \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + \sigma_{xy}^\infty, \quad (2.20)$$

$$\sigma_{yy} = \rho v_p^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \rho(v_p^2 - 2v_s^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\rho v_s^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \sigma_{yy}^\infty, \quad (2.21)$$

where $\sigma_{xx}^\infty, \sigma_{xy}^\infty, \sigma_{yy}^\infty$ is the homogeneous static initial stress field.

The equations of motion, expressed with the potentials are the following

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 \Phi, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v_s^2 \nabla^2 \Psi. \quad (2.23)$$

We assume that the problem has the fundamental symmetry properties $\Phi(t, x, -y) = -\Phi(t, x, y)$ and $\Psi(t, x, -y) = \Psi(t, x, y)$. From these symmetries we deduce the other useful symmetries $u_x(t, x, -y) = -u_x(t, x, y)$, $u_y(t, x, -y) = u_y(t, x, y)$, $\sigma_{xx}(t, x, -y) + \sigma_{xx}(t, x, y) = 2\sigma_{xx}^\infty$, $\sigma_{xy}(t, x, -y) = \sigma_{xy}(t, x, y)$ and $\sigma_{yy}(t, x, -y) + \sigma_{yy}(t, x, y) = 2\sigma_{yy}^\infty$. The condition of continuity of the stress vector on the fault plane Γ_f gives

$$\sigma_{yy}(t, x, 0^+) = \sigma_{yy}(t, x, 0^-) = \sigma_{yy}^\infty \quad (2.24)$$

$$\sigma_{xy}(t, x, 0^-) = \sigma_{xy}(t, x, 0^+) = \sigma_{xy}(t, x, 0), \quad (2.25)$$

i.e. the normal stress does not admit any variation during the slip. The condition of symmetry of the normal displacement $u_y(t, x, -y) = u_y(t, x, y)$ already gives its continuity i.e. the crack will not open. The friction boundary condition on the fault plane Γ_f reads

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(t, x, 0) &= -\sigma_{yy}^\infty \mu(x, \delta u_x(t, x)) \text{sign}(\delta v_x(t, x)) \quad \text{if } \delta v_x(t, x) \neq 0 \\ |\sigma_{xy}(t, x, 0)| &\leq -\sigma_{yy}^\infty \mu(x, \delta u_x(t, x)) \quad \text{if } \delta v_x(t, x) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

where $\delta u(t, x) = u_x(t, x, 0^+) - u_x(t, x, 0^-)$ and $\delta v(t, x) = \dot{u}_x(t, x, 0^+) - \dot{u}_x(t, x, 0^-)$ are the relative slip and the relative slip rate on the fault, and $\mu(x, \delta u)$ is the slip dependent friction coefficient. The initial conditions

$$u_x(0, x, y) = u_x^0(x, y), \quad u_y(0, x, y) = u_y^0(x, y), \quad (2.27)$$

$$\dot{u}_x(0, x, y) = v_x^0(x, y), \quad \dot{u}_y(0, x, y) = v_y^0(x, y), \quad (2.28)$$

are defined as a small perturbation of the equilibrium and obey the symmetry conditions expressed before. We consider in this paper only the case of an homogeneous fault and a friction law with a piecewise linear dependence on the slip, (see Figure 2.7) i.e.

$$\mu(x, \delta u) = \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{2L_c} \delta u \quad \text{if } \delta u \leq 2L_c, \quad (2.29)$$

$$\mu(x, \delta u) = \mu_d \quad \text{if } \delta u > 2L_c. \quad (2.30)$$

The fault is at the rupture level everywhere at $t = 0$ therefore $\sigma_{xy}^\infty = -\sigma_{yy}^\infty \mu_s = \sigma_s$, where σ_s is the admissible static stress. The choice of this particular condition is motivated by two reasons. The first one is physical: we want to describe the unstable evolution of the slip near an equilibrium position. Therefore we must suppose that there exists a large enough zone on the fault where the strength has been reached. The second reason is more technical: we want to perform an eigenvalue analysis and we want to calculate an analytical dominant part for the slip on the fault. This linearization needs the condition that the strength is reached everywhere on the fault. In practice the validity of this assumption will be limited to the very beginning of the process. We must point out again that the aim of this work is to give some mathematical features of the homogeneous initiation process i.e.

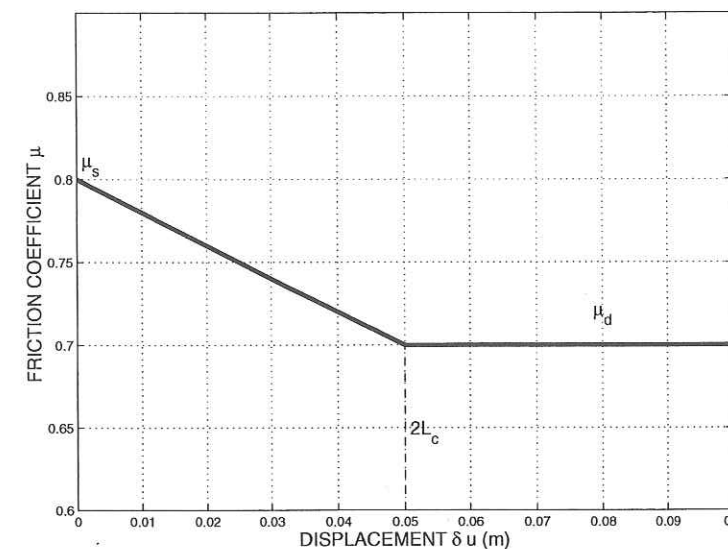


FIG. 2.7 – The slip dependent friction law. Three parameters σ_s (static friction), σ_d (dynamic friction) and L_s (critical slip) define the idealized slip dependent friction law.

the form of its evolution and its spectral representation. The time of growth is deduced from the response of the system to an initial perturbation that is as small as we want. One easily verifies that if the initial perturbation is zero i.e. $u_x^0(x, y) = 0$, $v_x^0(x, y) = 0$, $u_y^0(x, y) = 0$ and $v_y^0(x, y) = 0$ then $u_x(t, x, y) = 0$ and $u_y(t, x, y) = 0$ is a solution of our problem. Finally, the complete symmetry of our equations gives us the possibility to consider only the half space $y \geq 0$. To complete the notations, we denote by $\sigma_d = -\sigma_{yy}^\infty \mu_d$ the ordinary dynamic stress.

Eigenvalue Problem Our goal is to write the solution for the initiation phase in a spectral form. By definition, the initiation phase corresponds to the stage when the slip is less than $2L_c$ at all the points of the fault (see equation (2.29)). In this particular domain we rewrite the friction condition in this way:

$$\frac{\sigma_{xy}(t, x, 0)}{\rho v_s^2} = -\alpha_c u_x(t, x, 0) \quad (2.31)$$

where

$$\alpha_c = -\sigma_{yy}^\infty \frac{\mu_s - \mu_d}{\rho v_s^2 L_c} = \frac{\sigma_s - \sigma_d}{\rho v_s^2 L_c} \quad (2.32)$$

is an important parameter that compares the weakening of the fault to the rigidity of the body.

Since we guess the existence of real positive eigenvalues in the spectral representation of the solution, we want to extract the dominant part of the solution by taking only the eigenfunctions whose time dependence is exponentially growing (real positive eigenvalue) rather than oscillating (imaginary eigenvalue) (see Campillo & Ionescu (1997)). By λ we denote the eigenvalue and by $\Phi^\lambda(x, y)$ and $\Psi^\lambda(x, y)$ the eigenfunctions for the potentials. The eigenvalue problem is summarized by:

$$\lambda^2 \Phi^\lambda(x, y) = v_p^2 \nabla^2 \Phi^\lambda(x, y), \quad y > 0 \quad (2.33)$$

$$\lambda^2 \Psi^\lambda(x, y) = v_s^2 \nabla^2 \Psi^\lambda(x, y), \quad y > 0 \quad (2.34)$$

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial y^2}(x, 0) + (\eta^2 - 2) \frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial x^2}(x, 0) + 2 \frac{\partial^2 \Psi^\lambda}{\partial x \partial y}(x, 0) = 0 \quad (2.35)$$

$$2 \frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial x \partial y}(x, 0) + \frac{\partial^2 \Psi^\lambda}{\partial x^2}(x, 0) - \frac{\partial^2 \Psi^\lambda}{\partial y^2}(x, 0) = -\alpha_c \left(\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial \Psi^\lambda}{\partial y}(x, 0) \right) \quad (2.36)$$

where $\eta = \frac{v_p}{v_s}$.

By $u_x^\lambda(x, y)$ and $u_y^\lambda(x, y)$, we denote the corresponding eigenfunctions for the displacement that must be derived from the potentials following equations (2.17) and (2.18). Before one begins the eigenvalue analysis, one must know the type of the eigenvalues, i.e. are they real, imaginary or complex numbers? If we remember that the medium is homogeneous, we can demonstrate (see Appendix A) the important relation for two eigenfunctions:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda_i^2 (u_x^{\lambda_i} (u_x^{\lambda_j})^* + u_y^{\lambda_i} (u_y^{\lambda_j})^*) (x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_c v_s^2 u_x^{\lambda_i} (u_x^{\lambda_j})^*) (x, 0) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e_d^{\lambda_i, \lambda_j} (x, y) dy dx \end{aligned} \quad (2.37)$$

Here $e_d^{\lambda_i, \lambda_j}$ is the volumetric strain energy function. Its expression is given in Appendix A. It has the symmetry $e_d^{\lambda_i, \lambda_j} = (e_d^{\lambda_j, \lambda_i})^*$.

By taking $i = j$ in equation (2.37), we deduce that λ_i^2 is real and consequently we have $\lambda \in \mathbb{R}$ or $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Using the Fourier transform, we now express the eigenfunctions for the potentials as linear combinations of exponential functions. These eigenfunctions satisfy the eigenvalue problem summarized in equations (2.33), (2.34), (2.35), (2.36) and the finite energy conditions at $x = \pm\infty$ and $y = +\infty$. Therefore the eigenfunctions have the generic form:

$$\Phi^\lambda(x, y) = e^{ikx} (P_1 e^{py} + P_2 e^{-py}) \quad (2.38)$$

$$\Psi^\lambda(x, y) = e^{ikx} (S_1 e^{sy} + S_2 e^{-sy}) \quad (2.39)$$

k is necessarily real because of the finite energy condition at $x = \pm\infty$. Since λ can be either real or imaginary, it follows from the equations of motion that p and s are also either real or imaginary. Finally P_1, P_2, S_1 and S_2 are complex.

After using all the conditions of the problem, we find four types of eigenfunctions (see Appendix B) that comply with them. In the first set, the eigenfunctions are a combination of propagating P and S waves and they can be parameterized by the two wave-numbers k and s . The other numbers $p = p(k, s)$ and $\lambda = \pm\lambda_I(k, s)$ are deduced from them. In the second set, the eigenfunctions are the combination of S waves and P vanishing waves. They are also parameterized by the two wave-numbers k and s . The numbers $p = p(k, s)$ and $\lambda = \pm\lambda_{II}(k, s)$ are also deduced from them. In the third set, the eigenfunctions are the combination of P and S vanishing waves and they are only parameterized by the single wavenumber k . The numbers $s = s(k)$, $p = p(k)$ and $\lambda = \pm\lambda_{III}(k)$ are deduced from it. Finally in the fourth set, the eigenfunctions are not waves but vanishing and unstable functions. They are parameterized by the single wavenumber k . The numbers $s = s(k)$,

$p = p(k)$ and $\lambda = \pm\lambda_{IV}(k)$ are also deduced from it. The fourth set of eigenfunctions is the base of the dominant part of the solution. As can be seen in this fourth set, there is a limited spectral domain ($|k| < k_c$) in which the instability develops after the initial perturbation. Therefore large wave-numbers ($|k| > k_c$) do not participate in the unstable growth of the crack. This critical wavenumber k_c is defined by:

$$k_c = \frac{\alpha_c}{2(1 - 1/\eta^2)} = \left(\frac{\sigma_s - \sigma_d}{\rho v_s^2 L_c} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{v_p^2}{v_p^2 - v_s^2} \right) \quad (2.40)$$

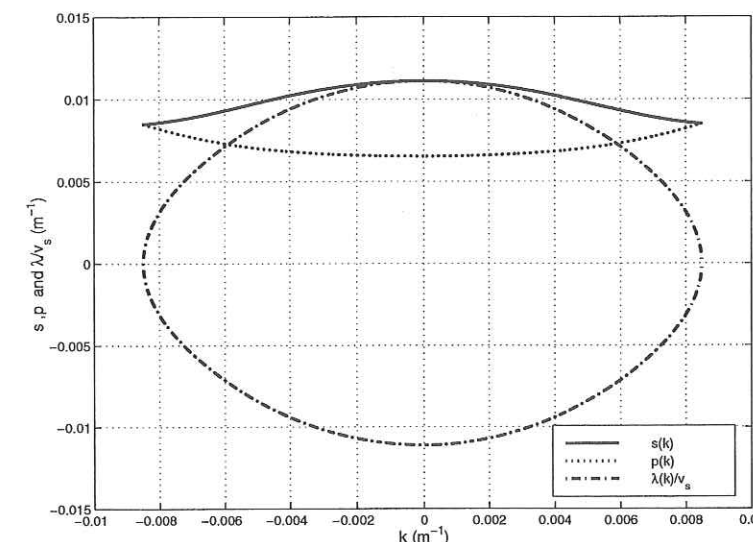


FIG. 2.8 – The eigenvalue analysis: the curves $s(k)$, $p(k)$, and $\lambda(k)/v_s$ for $k \in [-k_c, k_c]$ are solved numerically. Their determination allows us to define the dominant eigenfunctions needed for the calculation of the dominant part.

We associate the critical half length of the unstable patch $l_c = \frac{\pi}{2k_c}$ and we find:

$$l_c = \left(\frac{\pi \rho v_s^2 L_c}{\sigma_s - \sigma_d} \right) \left(\frac{v_p^2 - v_s^2}{v_p^2} \right) \quad (2.41)$$

This exact formula was given by Rice (1980). Andrews (1976) found an analogue but slightly different formula by using the Griffith fracture criterion. Das & Aki (1977) deduced Andrews's formula from Irwin criterion. Both fracture criteria are equivalent to deduce the critical length of growth of a crack (see Aki & Richards (1980)). In our present work, this result is derived from a stability analysis of the dynamic displacement field, that allows us to write down the analytical form of the solution. We give a short demonstration of the existence of the critical wavenumber k_c in Appendix C. Further analysis shows that the maximal real value for the eigenvalue λ is obtained if $k = 0$ then $s(0) = \alpha_c$, $p(0) = \alpha_c/\eta$, $\lambda(0) = v_s \alpha_c$.

Our conclusion is that the eigenfunctions containing the whole unstable part of the solution can be parameterized by the single real number k with $|k| < k_c$.

Analytical Dominant Part In this section, our aim is not to write a complete spectral formulation of the solution but to extract its dominant part. The dominant part is in fact the truncation of the spectral formulation to the fourth set of dominant eigenfunctions

written in Appendix B. Since we perform a truncation of the spectrum ($|k| < k_c$) the dominant part does not respect exactly the principle of causality. This question will be further discussed in the subsequent sections. First let us return to the property of the causal complete solution (dominant part + wave part) before extracting the dominant part. We classically consider that the complete solution can be written as a linear combination of all the eigenfunctions calculated in section 2.1.2. For example for the potential $\Phi(t, x, y)$, we obtain:

$$\Phi(t, x, y) = \Phi^w(t, x, y) + \Phi^d(t, x, y) \quad (2.42)$$

with

$$\begin{aligned} \Phi^w(t, x, y) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(W_{Ia\pm}^{k,s} \Phi_{Ia}^{k,s}(x, y) + W_{Ib\pm}^{k,s} \Phi_{Ib}^{k,s}(x, y) + W_{Ic\pm}^{k,s} \Phi_{Ic}^{k,s}(x, y) \right) e^{\pm \lambda_I(k,s)t} ds dk \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-|k|\sqrt{(\eta^2-1)}}^{|k|\sqrt{(\eta^2-1)}} W_{II\pm}^{k,s} \Phi_{II}^{k,s}(x, y) e^{\pm \lambda_{II}(k,s)t} ds dk \\ & + \left(\int_{-\infty}^{-k_c} + \int_{k_c}^{+\infty} \right) W_{III\pm}^k \Phi_{III}^k(x, y) e^{\pm \lambda_{III}(k)t} dk \end{aligned} \quad (2.43)$$

and

$$\Phi^d(t, x, y) = \int_{-k_c}^{k_c} W_{IV\pm}^k \Phi_{IV}^k(x, y) e^{\pm \lambda_{IV}(k)t} dk \quad (2.44)$$

The problem is to know the coefficients of the combination precisely. If the eigenfunctions have a property of orthogonality, one can identify each coefficient of the combination as the projection of the initial conditions on each corresponding eigenfunction. As we can see in Appendix A, such an orthogonality exists in our problem by taking ($i \neq j$) in the equation (2.37). This orthogonality property reads:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u_x^{\lambda_i}(u_x^{\lambda_j})^* + u_y^{\lambda_i}(u_y^{\lambda_j})^*)(x, y) dy dx = 0 \quad (2.45)$$

Finally, to write the dominant part, we just need to calculate the coefficients related to the dominant eigenfunctions i.e. $W_{IV\pm}^k$.

In order to simplify the formulas, let us write the dominant part for the displacements in this more convenient form:

$$u_x^d(x, y, t) = \int_{-k_c}^{k_c} u_x^k(y) e^{ikx} \left(W_0(k) ch(\lambda(k)t) + \frac{W_1(k)}{\lambda(k)} sh(\lambda(k)t) \right) dk \quad (2.46)$$

$$u_y^d(x, y, t) = \int_{-k_c}^{k_c} i u_y^k(y) e^{ikx} \left(W_0(k) ch(\lambda(k)t) + \frac{W_1(k)}{\lambda(k)} sh(\lambda(k)t) \right) dk \quad (2.47)$$

where the functions $u_x^k(y)$ and $u_y^k(y)$ are derived in Appendix D from the y-dependence of the eigenfunctions $\Phi_{IV}^k(x, y)$ and $\Psi_{IV}^k(x, y)$ (fourth set of Appendix B). In these expressions (2.46) and (2.47) $W_0(k)$ and $W_1(k)$ replace $W_{IV\pm}^k$ and $\lambda(k)$ replaces $\lambda_{IV}(k)$. Concerning the functions u_x^k and u_y^k , a numerical solution for $s(k)$, $p(k)$ and $\lambda(k)$ is plotted on

Figure 2.8. The numerical value of k_c comes from choices of dimensional quantities given in next section 2.1.2. The corresponding functions u_x^k , u_y^k are also plotted on Figure 2.9. In order to complete the analysis, we give in Appendix D the functions Φ^k and Ψ^k for the potentials. We also give in this appendix the stress functions σ_{xx}^k , σ_{xy}^k and σ_{yy}^k and their plots on Figure 2.9.

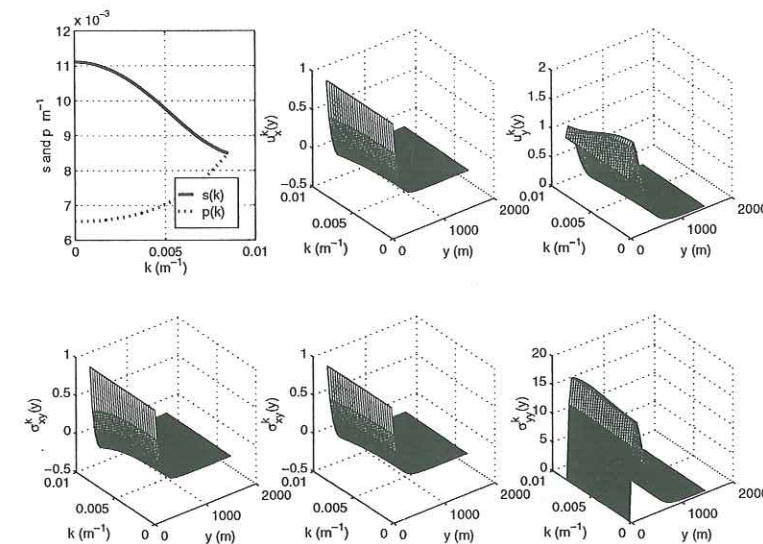


FIG. 2.9 – The dominant eigenfunctions. Top left figure: the curves $s(k)$ and $p(k)$ for $k \in [0, k_c]$. The other figures are the representation of the corresponding dominant eigenfunctions for displacements and stresses.

We now proceed to the calculation. To obtain $W_0(k)$, we use the initial displacements. First we write the identity

$$u_x^0(x, y) = u_x^w(0, x, y) + u_x^d(0, x, y) = u_x^w(0, x, y) + \int_{-k_c}^{k_c} u_x^k(y) e^{ikx} W_0(k) dk \quad (2.48)$$

$$u_y^0(x, y) = u_y^w(0, x, y) + u_y^d(0, x, y) = u_y^w(0, x, y) + \int_{-k_c}^{k_c} i u_y^k(y) e^{ikx} W_0(k) dk \quad (2.49)$$

Second we use the orthogonality property (2.45) which states that the eigenfunctions constituting the wave part are orthogonal to the one constituting the dominant part. Therefore the dot product of a dominant eigenfunction of wave number k' with the wave part ($u_x^w(0, x, y)$, $u_y^w(0, x, y)$) at $t = 0$ is zero i.e.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u_x^w(0, x, y) u_x^{k'}(y) - i u_y^w(0, x, y) u_y^{k'}(y)) e^{-ik'x} dy dx = 0 \quad (2.50)$$

Consequently the dot product of a dominant eigenfunction of wave number k' with the complete solution ($u_x^0(x, y)$, $u_y^0(x, y)$) at $t = 0$ is reduced to the dot product of this dominant eigenfunction with the dominant part ($u_x^d(0, x, y)$, $u_y^d(0, x, y)$) at $t = 0$. By replacing ($u_x^d(0, x, y)$, $u_y^d(0, x, y)$) by its expression in equations (2.48) and (2.49) we obtain:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u_x^0(x, y) u_x^{k'}(y) - i u_y^0(x, y) u_y^{k'}(y)) e^{-ik'x} dy dx \\
&= \int_{-k_c}^{k_c} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u_x^k(y) u_x^{k'}(y) + u_y^k(y) u_y^{k'}(y)) e^{i(k-k')x} W_0(k) dy dx dk \\
&= \int_{-k_c}^{k_c} 2\pi \delta(k - k') W_0(k) \int_0^{+\infty} (u_x^k(y) u_x^{k'}(y) + u_y^k(y) u_y^{k'}(y)) dy dk \\
&= 2\pi W_0(k') \int_0^{+\infty} ((u_x^{k'})^2(y) + (u_y^{k'})^2(y)) dy \quad (2.51)
\end{aligned}$$

where δ is the Dirac function.

The final result is

$$W_0(k) = \frac{1}{D(k)} \int_0^{+\infty} (u_x^k(y) \tilde{u}_x^0(k, y) - i u_y^k(y) \tilde{u}_y^0(k, y)) dy \quad (2.52)$$

where $\tilde{u}_x^0(k, y)$ and $\tilde{u}_y^0(k, y)$ are the x-Fourier transforms of the initial displacements and where $D(k)$ is the integral of the square of the eigenfunction components (i.e. their norm),

$$\begin{aligned}
D(k) &= \frac{\pi}{s(k)p(k)} \\
&\times (s^2(k)k^2 (4s(k)(k^2 + p^2(k)) - 5p(k)(s^2(k) + k^2)) + p(k)(s^6(k) + k^6)) \quad (2.53)
\end{aligned}$$

In the same way $W_1(k)$ is calculated by replacing the x-Fourier transforms of the initial displacements in equation (2.52) by the x-Fourier transforms of the initial velocities $\tilde{v}_x^0(k, y)$ and $\tilde{v}_y^0(k, y)$.

Characteristics of the Initiation Phase Let us now recall precisely our definition of the initiation phase. It begins at $t = 0$ and ends at the critical time $t = T_c$. For $t < T_c$, every point is on the linear decreasing part of the friction law i.e. $\forall x \delta u_x(x, t) \leq 2L_c$. For $t > T_c$, the crack is in the propagative regime and $(\exists x / \delta u_x(x, t) > 2L_c)$. We consider a small perturbation of u_x and v_x with the support $[-a, a] \times [0, +\infty[$. To determine T_c , we use a simplified expression of the dominant part (2.46) by considering that the evolution of the displacement is mainly determined by the eigenfunction with the greatest eigenvalue $\lambda(k = 0) = v_s \alpha_c$. Therefore, during the nucleation phase the solution grows by a factor e in an interval of time $1/(v_s \alpha_c)$. The total time of nucleation depends on the ratio of displacement at the end of nucleation $2L_c$, to the displacement of the projection of the initial perturbation onto the most dominant eigenfunction. For this purpose we use the solution above with $k = 0$. This approximation is valid if the spectrum of the perturbation is quasi constant on $[-k_c, k_c]$ i.e. if $\frac{\pi}{ak_c} \gg 1$. Therefore for a perturbation of u_x we have:

$$\tilde{u}_x^0(k, y) \approx \tilde{u}_x^0(0, y) = \int_{-a}^a u_x^0(x, y) dx \quad (2.54)$$

$$W_0(0) = \frac{1}{D(0)} \int_0^{+\infty} (u_x^0(y) \tilde{u}_x^0(0, y)) dy = \frac{1}{\pi \alpha_c^2} \int_0^{+\infty} \int_{-a}^a u_x^0(x, y) e^{-\alpha_c y} dx dy \quad (2.55)$$

The same computation can be done for a perturbation of v_x to obtain $W_1(0)$. If the critical time T_c is large enough i.e. $\lambda(0)T_c \gg 1$ i.e. $T_c \gg \frac{1}{v_s \alpha_c}$ we obtain

$$u_x^d(T_c, 0, 0) \approx k_c u_x^0(0) \left(W_0(0) + \frac{W_1(0)}{v_s \alpha_c} \right) \frac{e^{\lambda(0)T_c}}{2} = k_c \alpha_c^3 \left(W_0(0) + \frac{W_1(0)}{v_s \alpha_c} \right) \frac{e^{v_s \alpha_c T_c}}{2} \quad (2.56)$$

The equation $u_x^d(T_c, 0, 0) = L_c$ leads to the following estimation of T_c

$$T_c \approx \frac{1}{v_s \alpha_c} \ln \left(\frac{\pi L_c}{\frac{\alpha_c^4}{4(1-1/\eta^2)} (W_0(0) + \frac{W_1(0)}{v_s \alpha_c})} \right) \quad (2.57)$$

We perform a series of numerical experiments in order to confront the theoretical results for the dominant part with the complete solution calculated with a finite difference method. The numerical scheme of the finite difference method is not explained because the details are beyond the scope of this paper. We just indicate that it uses a classical finite difference scheme (Lax-Wendroff) for the iterations in the body. It has been adapted to the existence of the two phase velocities of P and S waves. We choose $\Delta l = v_p \Delta t$ for the convergence. On the fault, iterations are calculated by using the integration of the characteristic lines in order to capture the instability. More details on the numerical aspects are given by Ionescu & Campillo (1999). We use a grid of 1200×600 points in the x,y plane. The parameters of computation are $\Delta l = 5m$, $\rho = 3000kg/m^3$, $v_s = 3000m/s$, $\eta = v_p/v_s = 1.7$, $\sigma_{yy}^\infty = -150MPa$, $\sigma_{xy}^\infty = 120MPa$, $\mu_s = 0.8$, $\mu_d = 0.7$ and $L_c = 0.05m$ (if no indications are given). With these values we obtain $\alpha_c = 0.011m^{-1}$, $k_c = 0.0085m^{-1}$ and $l_c = 283m$. The initial conditions are given by:

$$u_x^0(x, y) = 0, \quad u_y^0(x, y) = 0 \quad (2.58)$$

$$v_x^0(x, y) = v_0 e^{-x^2/a^2 - y^2/b^2}, \quad v_y^0(x, y) = 0 \quad (2.59)$$

with always $v_0 = 0.0001m/s$ and $a = b = 75m$ (if no other indications are given).

On Figure 2.10, we plot the comparison between the finite difference method and the dominant part. We observe a very good agreement between these two independent methods. This shows that the unstable evolution of the initiation phase is accurately described by the dominant part. Concerning the evaluation of the time of initiation, we find $0.3777s < T_c < 0.3784s$ with the finite difference while our approximate formula (2.57) gives $T_c = 0.3646s$.

Rather than to focus on the total time of nucleation, it is also interesting to examine the growth of the perturbation calculated with the finite difference method. We compute the logarithm of the slip velocity $\log_{10} \frac{\delta v_x(t, 0)}{\delta v_x(0, 0)}$ at the center of the perturbation. The results are plotted on Figure 2.11 for various L_c . The rate of growth associated with the dominant part is given by the slope of the tilted linear part. The beginning of the curves shows the effect of the wave part whereas the end represents the crack part.

We now want to comment on the similarities and the differences between the antiplane and the inplane problems. We summarize in the following table the main features of the dominant part for both problems:

	Slipping patch	Time growth	y-decreasing
Antiplane	π/α_c	$\approx e^{v_s \alpha_c t}$	$e^{-\alpha_c y}$
Inplane	$2(1 - 1/\eta^2)\pi/\alpha_c$	$\approx e^{v_s \alpha_c t}$	$\approx e^{-\alpha_c y}$

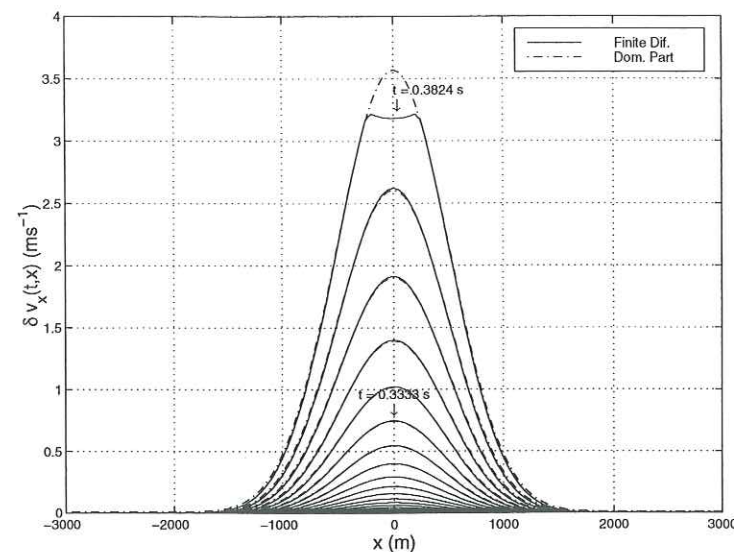


FIG. 2.10 – The plot of the velocity on the fault for different times in the initiation phase. See the good agreement between the two independent methods. Let us remark that for the last time the curve has left the initiation phase.

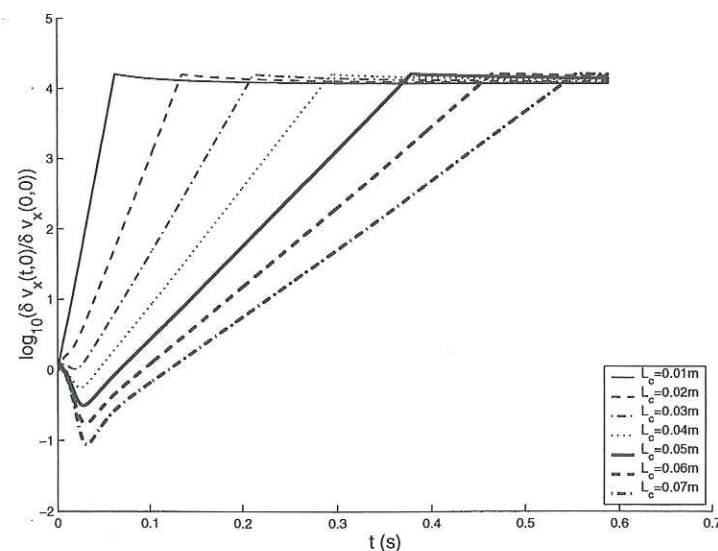


FIG. 2.11 – The plot of the logarithm of the velocity for different values of L_c at the center of the perturbation. For the small values of L_c one can observe the effect of the wave part before the constant rate of growth that corresponds to the dominant part.

For the initiation stage, we observe an almost complete similarity between the two problems. The main modification concerns the characteristic length in the inplane case compared to the antiplane case. Indeed the inplane critical length is the antiplane one multiplied by the factor $2(1 - 1/\eta^2)$, that is 1.3 for $\eta = 1.7$. In the inplane case, the y dependency does not follow the unique exponential function $e^{-\alpha_c y}$ found for the antiplane case but a more complex combination of decreasing exponential functions (see again the dominant eigenfunctions on Figure 2.9). In fact we can consider that the antiplane problem is (mathematically speaking) a particular case of the inplane problem where the curve $s(k)$ does not depend on k anymore since in the antiplane case $s(k) = \alpha_c$ (See Campillo & Ionescu (1997)).

Transition from Initiation to Propagation Several comments have to be made concerning the physical interpretation of the properties of the initiation phase. In order to illustrate our purpose, one can see on Figures 2.12 and 2.13 the velocity and stress distributions at the particular time $t_1 = 0.3627s$ in the initiation phase. First, one does not observe any singularity for these functions. Indeed the fault is at the rupture level everywhere and no stress concentration is possible. Second, the motion evolves globally on the fault, losing the form of the initial perturbation that was only of a size of around twenty grid points. This effect expresses the wavenumber cut at k_c . Third, one does not observe any classical crack tip on the fault. Fourth, there is no visible wave front in the body i.e. the process of initiation is not emitting and it is localized on the fault. Finally the meaning of this initiation phase is the non stationary motion that produces a continuous transition from the initial perturbation to the propagation of a self-similar crack.

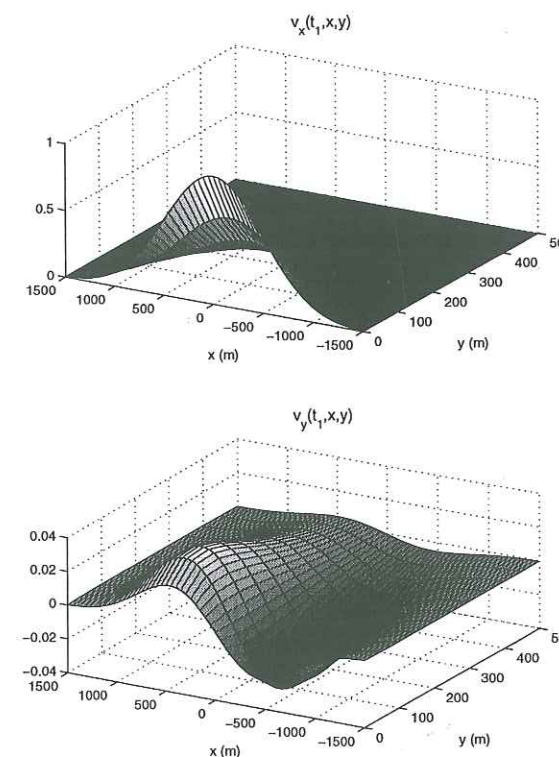


FIG. 2.12 – The plot of the velocities in the medium at $t_1 = 0.3627s$ in the initiation phase. The slip is localized on the fault and no wave is visible.

In the following part, without entering in detail in the study of the crack propagation that has been studied by Andrews (1985) in the inplane case and Virieux & Madariaga (1982) and Day (1982) in three dimensions, we examine the way how the system does

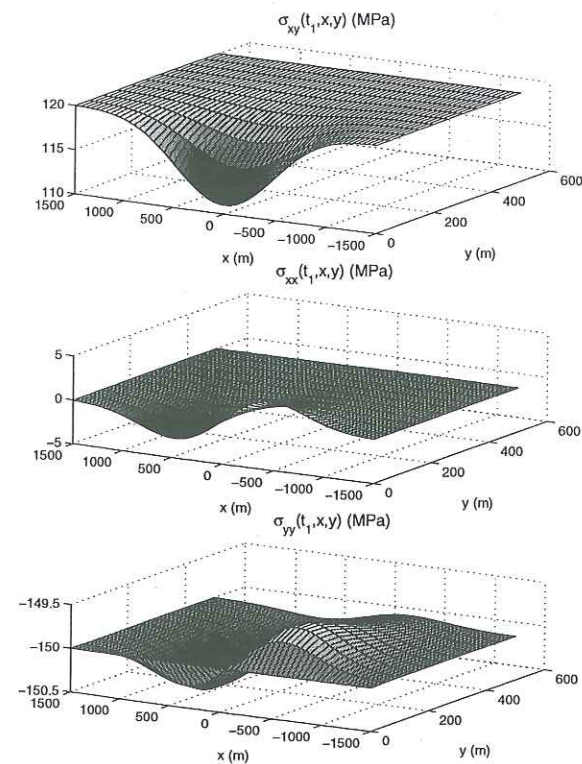


FIG. 2.13 – The plot of the stresses in the medium at $t_1 = 0.3627s$ in the initiation phase. The stress change is localized on the fault and no wave is visible.

the transition between the initiation stage to the propagation stage. On the Figures 2.14 and 2.15 one can observe the velocity and stress functions in the propagative phase at the time $t_2 = 0.5882s$, computed using finite difference method. It is now possible to identify the crack tips and two wave fronts for P and S waves propagating in the body, which indicates a huge radiation compared to the initiation phase. The propagation process is qualitatively very different from the initiation process. Let us now see the relationship between the two stages.

On the Figure 2.16 we did three simulations. The curves (1) correspond to the complete simulation of the propagation with finite differences and the friction law represented on Figure 2.7. The curves (2) are the result of the simulation with finite differences of the initiation phase for a fictitious friction law, in which a constant weakening rate exists whatever the slip, that is $\sigma_d \rightarrow -\infty$ and $L_c \rightarrow +\infty$. The curve (2') is the analytical form of the dominant part extrapolated outside the initiation domain. The dominant part naturally fits with the curve (2) when the effect of non causality (due to a limited spectrum) of (2') is low (i.e. for small times). For large times, the slip computed is enormous and the effect of non causality of the dominant part of the solution can be seen. A striking feature of Figure 2.16 is that the curves (1) and (2) are strictly identical outside the crack zone (by the name crack zone, we define the zone inside the crack tips and where the slip exceeds $2L_c$). In fact this observation shows that the points which have overcome the critical length L_c in the middle of the fault do not disturb the initiation process that continues outside the crack tips, as if all the points outside the crack tips were in a fictive uniform initiation stage. In other words, our linearized approach is still valid ahead the crack tips in the propagation regime. Before giving an explanation to this fact, let us recall the results found by Burridge (1973). He demonstrated that the velocity of the crack tips of a self similar crack depends on the parameter $S = \frac{\sigma_s - \sigma_{xy}^\infty}{\sigma_{xy}^\infty - \sigma_d}$.

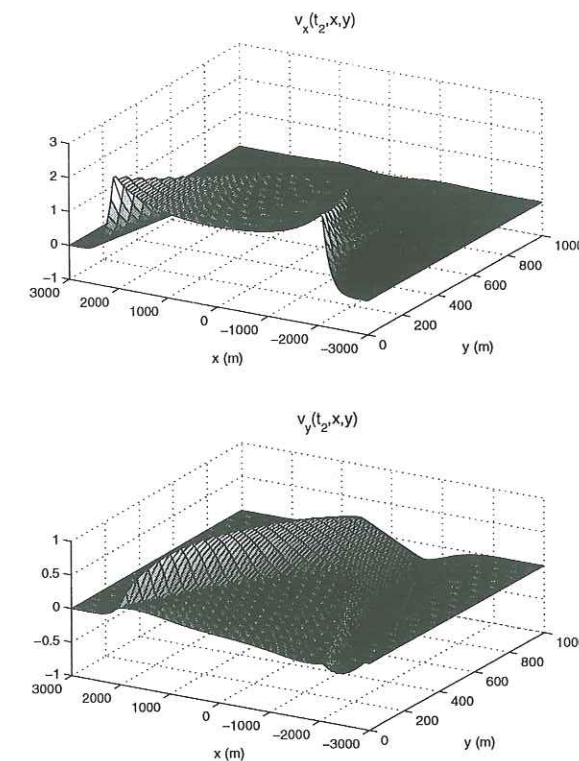


FIG. 2.14 – The plot of the velocities at $t_2 = 0.5882s$ in the propagation phase. Here the two traveling wave front of P and S waves are visible.

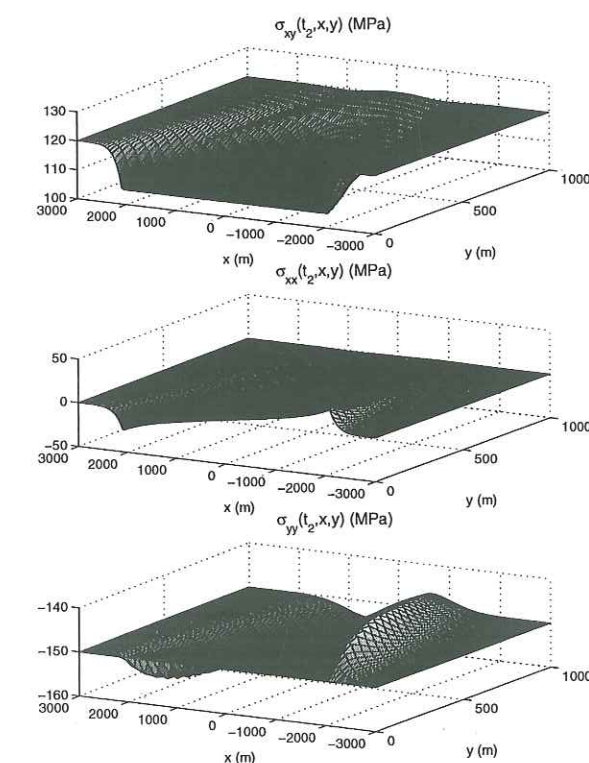


FIG. 2.15 – The plot of the stresses at $t_2 = 0.5882s$ in the propagation phase. Here the two traveling wave front of P and S waves are visible.

If $S > 1.63$ the admissible velocity is the Rayleigh wave speed. If $S = 0$, as in our case, the P wave velocity is admissible. On Figure 2.17 we plot the trajectory of the crack tips computed with the finite difference method. These trajectories correspond to the curves (1). We observe that the crack tips travel at an apparent velocity larger than the P wave velocity but they are always in the cone of causality of the process. After a long time the crack tip's velocity decreases asymptotically to the P wave velocity as expected. This observation confirms the results of Burridge but it also gives us the response to the fact that our linearized approach is valid to describe the velocity and stress fields ahead the crack tips. Indeed the crack tips travel at an apparent P supersonic velocity and therefore no information from the middle of the fault has enough time to come and perturbate the dynamics of the initiation outside the crack tips.

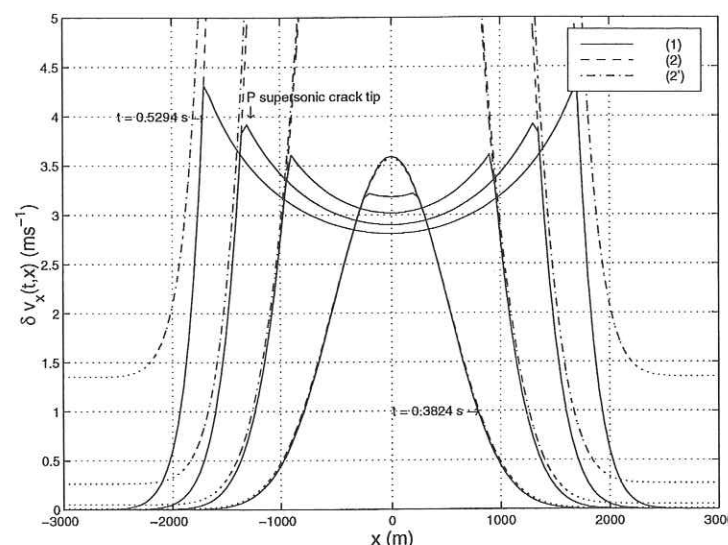


FIG. 2.16 – The transition from initiation to propagation. Here we plot the velocity on the fault for different times in the propagation phase. The plot (1) is the simulation in finite difference of the complete solution with a bounding dynamical friction σ_d . The plot (2) is the simulation in finite difference of the initiation as if it could continue without any bounding dynamical friction σ_d . (2') is the analytical dominant part.

Finally in this particular case where the fault is near the rupture everywhere, the slip outside the crack tips is well described by the extrapolation of an homogeneous initiation. Our linearized description is still valid to describe it. More precisely, the complete linearized calculation computed with finite difference, corresponding to the curves (2), is exact and the analytical dominant part, corresponding to the curves (2'), is valid while its non causality effect is small, i.e. for relatively small times. In another words the propagation of the crack in our case is not due to the accumulation of stress but is due to the unstable growth of the small perturbation that propagates on the fault at the P wave velocity, an artifact of the idealization that whole fault is initially at σ_s . In the antiplane case the same remarks could be done in the same context.

Conclusion We study the initiation of an unstable inplane elastodynamic shear crack under slip-weakening friction. Some characteristics were found by previous studies. We propose here an eigenvalue analysis that allows us to define the dominant part of the solution that describes the unstable growth of the slip. We obtain an analytical expression for the dominant part. The formula shows some differences with the antiplane case but the

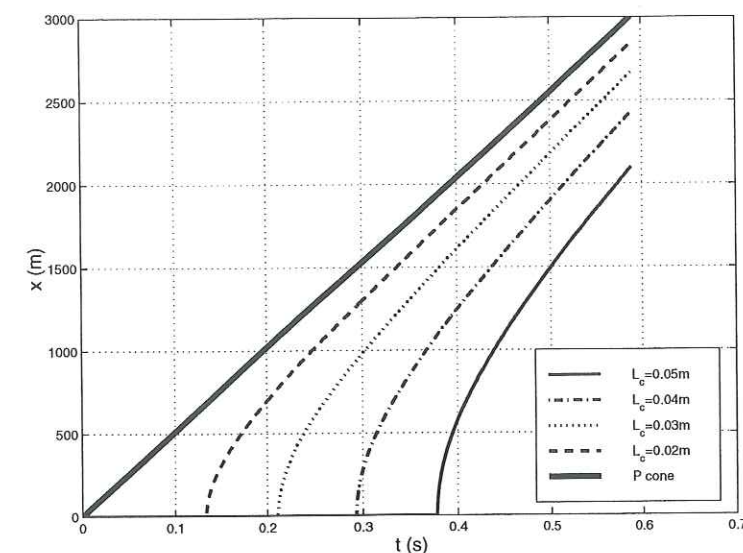


FIG. 2.17 – The trajectory of the crack tips on the fault for different values of L_c . Let us see the apparent P supersonic velocity. It converges asymptotically to the P wave velocity for great times.

main features are conserved. Indeed the unstable part of the response to a little perturbation will develop on a limited spectral domain. The limiting wavenumber (corresponding to the slipping patch) is derived from the slope of the friction law, the shear rigidity and the ratio between the P and the S wave velocities. We also give the characteristic time of growth of the perturbation which is the same as in the antiplane case. We complete this result by giving an approximation of the time of the initiation phase. Our results are compared to a numerical solution calculated with finite differences. In the propagation regime, we show that the crack tips travel at an apparent P supersonic velocity which tends asymptotically to the P velocity. This observation is in agreement with previous studies in the case where the fault is at the admissible static load everywhere. More than this verification, our simulations gives us an argument to say that our linearized approach (for any time) and its description by the dominant part (for short times) is still valid to give the stress and velocity fields ahead the crack tips in the propagation regime.

Acknowledgments

We are grateful to D.J. Andrews and S.M. Day for their helpful reviews of the manuscript. This work was supported by the program "GRD Forpro" of CNRS.

Bibliography

- Aki, K. and P.G. Richards (1980).
Quantitative Seismology. Theory and Methods.
Freeman.
- Andrews, D.J. (1976).
Rupture Velocity of Plane Strain Shear Cracks.
J. Geophys. Res., 81, 5679-5687.
- Andrews, D.J. (1985).
Dynamic Plane-Strain Shear Rupture with a Slip-Weakening Friction Law Calculated by a Boundary Integral Method.
Bull. Seism. Soc. Am., 75, 1-21.
- Burridge, R. (1973).
Admissible Speeds for Plane-Strain Self-Similar Shear Cracks with Friction but Lacking Cohesion.
Geophys. J. R. Astr. Soc., 35, 439-455.
- Campillo, M. and I.R. Ionescu (1997).
Initiation of an Antiplane Shear Instability under Slip Dependent Friction.
J. Geophys. Res., 102, 20363-20371.
- Das, S. and K. Aki (1977).
A numerical Study of Two-dimensional Spontaneous Rupture Propagation.
Geophys. J. R. Astr. Soc., 50, 643-668.
- Day, S.M. (1982).
Three-Dimensional Simulation of Spontaneous Rupture: The Effect of Nonuniform Prestress.
Bull. Seism. Soc. Am., 72, 1881-1902.
- Ionescu, I.R. and M. Campillo (1999).
Numerical Study of Initiation: Influence of Non-Linearity and Fault Finiteness.
J. Geophys. Res., 104, 3013-3024.
- Matsu'ura, M., H. Kataoka and B. Shibazaki (1992).
Slip Dependent Friction Law and Nucleation Processes in Earthquake Rupture.
Tectonophysics, 211, 135-148.
- Ohnaka, M., Y. Kuwahara and K. Yamamoto. (1987).
Constitutive Relations between Dynamic Physical Parameters near a Tip of the Propagation Slip during Stick-slip Shear Failure.
Tectonophysics, 144, 109-125.
- Ohnaka, M. (1996).
Non-uniformity of the Constitutive Law Parameter for Shear Rupture and Quasi-static Nucleation to Dynamic Rupture: A Physical Model of Earthquake Generation Model, Paper Presented at Earthquake Prediction: The Scientific Challenge, U.S. Acad. of Sci., Irvine, Calif.

Rice, J.R. (1980).

The mechanics of earthquake rupture. In: Physics of the Earth's Interiors, Proc. Int. Sch. Phys. Enrico Fermi (Editors, Dziewonski, A.M., and E. Boschi), North-Holland, Amsterdam, pp. 555-649.

Shibazaki, B. and M. Matsu'ura (1992).

Spontaneous Processes for Nucleation, Dynamic Propagation and Stop of Earthquake Rupture.

Geoph. Res. Lett., 1189-1192.

Virieux, J. and R. Madariaga (1982).

Dynamic Faulting Studied by a Finite Difference Method.

Bull. Seism. Soc. Am., 72, 345-369.

Appendix A: Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions Let us consider an elastic body Ω and its boundary $\partial\Omega$. Let us consider the displacement field u_k and the corresponding stress tensor field σ_{kl} . We write the equation of motion in the body

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \sigma_{kl,l}$$

We can multiply each side of this equation by any independent field v_k and integrate on the body:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} v_k dV = \int_{\Omega} \sigma_{kl,l} v_k dV$$

We consider the equality $\sigma_{kl,l} v_k = (\sigma_{kl} v_k)_{,l} - \sigma_{kl} v_{k,l}$. We recall the symmetry of the stress tensor i.e. $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$ and deduce that $\sigma_{kl} v_{k,l} = \sigma_{kl} \epsilon_{k,l}$ where $\epsilon_{kl} = (v_{k,l} + v_{l,k})/2$ is the strain tensor associated to the field v_k . We are now able to apply the Gauss theorem and we find:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} v_k dV = \int_{\partial\Omega} \sigma_{kl} v_k dS_l - \int_{\Omega} \sigma_{kl} \epsilon_{kl} dV \quad (2.60)$$

We consider the particular case when $u_k = (u_x^{\lambda_i}, u_y^{\lambda_i})$ and $v_k = ((u_x^{\lambda_j})^*, (u_y^{\lambda_j})^*)$. We can replace $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ by $(\lambda_i)^2$ for an eigenfunction. Taking into account the frictional boundary condition (2.31), we have for our particular problem:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda_i^2 (u_x^{\lambda_i} (u_x^{\lambda_j})^* + u_y^{\lambda_i} (u_y^{\lambda_j})^*) (x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_c v_s^2 u_x^{\lambda_i} (u_x^{\lambda_j})^*) (x, 0) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e_d^{\lambda_i, \lambda_j} (x, y) dy dx \end{aligned} \quad (2.61)$$

Here $e_d^{\lambda_i, \lambda_j} = v_p^2 (\epsilon_{xx}^{\lambda_i} (\epsilon_{xx}^{\lambda_j})^* + \epsilon_{yy}^{\lambda_i} (\epsilon_{yy}^{\lambda_j})^*) + (v_p^2 - 2v_s^2) (\epsilon_{xx}^{\lambda_i} (\epsilon_{yy}^{\lambda_j})^* + \epsilon_{yy}^{\lambda_i} (\epsilon_{xx}^{\lambda_j})^*) + 2v_s^2 \epsilon_{xy}^{\lambda_i} (\epsilon_{xy}^{\lambda_j})^*$ is the operator of volumic energy of strain. One can easily remark that it has the symmetry $e_d^{\lambda_j, \lambda_i} = (e_d^{\lambda_i, \lambda_j})^*$.

If one takes $i = j$ in equation (2.61) one obtain

$$\lambda_i^2 = \frac{\alpha_c v_s^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |u_x^{\lambda_i}|^2 (x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e_d^{\lambda_i, \lambda_i} (x, y) dy dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (|u_x^{\lambda_i}|^2 + |u_y^{\lambda_i}|^2) (x, y) dy dx} \quad (2.62)$$

Since $e_d^{\lambda_i, \lambda_i} = (e_d^{\lambda_i, \lambda_i})^*$, we deduce that $e_d^{\lambda_i, \lambda_i}$ is real and finally that λ_i^2 is real. Consequently $\lambda_i \in \mathbb{R}$ or $\lambda_i \in i\mathbb{R}$.

Finally, we take the conjugate expression of (2.61) and replace i by j and if we do the difference with (2.61) we obtain:

$$(\lambda_i^2 - (\lambda_j^2)^*) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (u_x^{\lambda_i} (u_x^{\lambda_j})^* + u_y^{\lambda_i} (u_y^{\lambda_j})^*) (x, y) dy dx = 0 \quad (2.63)$$

Therefore if $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ the integral in equation (2.63) is zero, as expected from the property of orthogonality of the eigenfunctions.

Appendix B: The Complete Set of Eigenfunctions In this section we denote by η the velocity ratio $\eta = v_p/v_s$

First Set

In this set two wave-numbers k and s are needed to describe the eigenfunctions. They have a negative value of λ^2 (stable).

$$\begin{aligned} (k, s) &\in \mathbb{R}^2 \quad \text{with} \quad |s| > |k| \sqrt{(\eta^2 - 1)} \\ p(k, s) &\in \mathbb{R} \quad \text{with} \quad p(k, s) = \pm \frac{1}{\eta} \sqrt{s^2 - (\eta^2 - 1)k^2} \\ \lambda &= \pm \lambda_I(k, s) \in i\mathbb{R} \quad \text{with} \quad \lambda_I(k, s) = i v_s \sqrt{s^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{Ia}^{k,s}(x, y) &= e^{ikx} ((k^2 - s^2) \sin(p(k, s)y)) \\ \Psi_{Ia}^{k,s}(x, y) &= e^{ikx} (2ikp(k, s) \cos(sy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{Ib}^{k,s}(x, y) &= e^{ikx} (4k^2 p(k, s) s \cos(p(k, s)y) - \alpha_c s (s^2 + k^2) \sin(p(k, s)y)) \\ \Psi_{Ib}^{k,s}(x, y) &= e^{ikx} (-2ikp(k, s) (s^2 - k^2) \sin(sy)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{Ic}^{k,s}(x, y) &= e^{ikx} (2iks(s^2 - k^2) \cos(p(k, s)y)) \\ \Psi_{Ic}^{k,s}(x, y) &= e^{ikx} (\alpha_c s (s^2 + k^2) \cos(sy) + (s^2 - k^2)^2 \sin(sy)) \end{aligned}$$

Second Set

In this set two wave-numbers k and s are needed to describe the eigenfunctions. They have a negative value of λ^2 (stable).

$$\begin{aligned} (k, s) &\in \mathbb{R}^2 \quad \text{with} \quad |s| < |k| \sqrt{(\eta^2 - 1)} \\ p(k, s) &\in \mathbb{R}^+ \quad \text{with} \quad p(k, s) = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)k^2 - s^2} \\ \lambda &= \pm \lambda_{II}(k, s) \in i\mathbb{R} \quad \text{with} \quad \lambda_{II}(k, s) = i v_s \sqrt{s^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\Phi_{II}^{k,s}(x,y) = e^{ikx} (2iks(s^2 - k^2)e^{-p(k,s)y})$$

$$\Psi_{II}^{k,s}(x,y) = e^{ikx} ((\alpha_c s(s^2 + k^2) - 4k^2 p(k,s)s) \cos(sy) + (s^2 - k^2)^2 \sin(sy))$$

Third Set

In this set one single wavenumber k is needed to describe the eigenfunctions. They have a negative value of λ^2 (stable).

$$k \in \mathbb{R} \quad \text{with} \quad |k| > k_c = \frac{\alpha_c}{2(1 - 1/\eta^2)}$$

$$s(k) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{with} \quad \frac{(k^2 + s^2(k))^2 - \alpha_c s(k)(s^2(k) - k^2)}{4k^2 s(k)} = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)k^2 + s^2(k)}$$

$$p(k) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{with} \quad p(k) = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)k^2 + s^2(k)}$$

$$\lambda = \pm \lambda_{III}(k) \in i\mathbb{R} \quad \text{with} \quad \lambda_{III}(k) = i v_s \sqrt{k^2 - s^2(k)}$$

$$\Phi_{III}^k(x,y) = e^{ikx} (2iks(k)e^{-p(k)y})$$

$$\Psi_{III}^k(x,y) = e^{ikx} ((s^2(k) + k^2)e^{-s(k)y})$$

Fourth Set

In this set one single wavenumber k is needed to describe the eigenfunctions. They have a positive value of λ^2 (unstable).

$$k \in \mathbb{R} \quad \text{with} \quad |k| < k_c = \frac{\alpha_c}{2(1 - 1/\eta^2)} \quad (2.64)$$

$$s(k) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{with} \quad \frac{(k^2 + s^2(k))^2 - \alpha_c s(k)(s^2(k) - k^2)}{4k^2 s(k)} = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)k^2 + s^2(k)} \quad (2.65)$$

$$p(k) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{with} \quad p(k) = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)k^2 + s^2(k)} \quad (2.66)$$

$$\lambda = \pm \lambda_{IV}(k) \in \mathbb{R} \quad \text{with} \quad \lambda_{IV}(k) = v_s \sqrt{s^2(k) - k^2} \quad (2.67)$$

$$\Phi_{IV}^k(x,y) = e^{ikx} (2iks(k)e^{-p(k)y}) \quad (2.68)$$

$$\Psi_{IV}^k(x,y) = e^{ikx} ((s^2(k) + k^2)e^{-s(k)y}) \quad (2.69)$$

Appendix C: Critical Wavenumber k_c We define the dimensionless functions $\bar{s} = s(k)/k$, $\bar{p} = p(k)/k$ and $\bar{\alpha}_c = \alpha_c/k$ and we rewrite equations (2.65) and (2.66):

$$\bar{p} = \frac{(1 + \bar{s}^2)^2 - \bar{\alpha}_c \bar{s}(\bar{s}^2 - 1)}{4\bar{s}} = \bar{p}_1(\bar{s}) \quad (2.70)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1) + \bar{s}^2} = \bar{p}_2(\bar{s}) \quad (2.71)$$

We want to solve for \bar{s} that satisfies $\bar{p}_1(\bar{s}) = \bar{p}_2(\bar{s})$. One can verify that $\bar{s}_1 = 1$ is always a solution of the system (2.70) and (2.71). In this case $\lambda = 0$. Moreover the variations of the curves $\bar{p}_1(\bar{s})$ and $\bar{p}_2(\bar{s})$ indicate that there exist one other solution \bar{s}_2 (see Figure 2.18). If $\frac{d\bar{p}_1}{d\bar{s}}(\bar{s}_1) < \frac{d\bar{p}_2}{d\bar{s}}(\bar{s}_1)$ then $\bar{s}_2 > 1$ and consequently $\lambda(\bar{s}_2)$ is real. This condition is equivalent to $\bar{\alpha}_c > 2(1 - 1/\eta^2)$ i.e. $k < k_c = \frac{\alpha_c}{2(1 - 1/\eta^2)}$. In another words, $k < k_c$ ensures that there is an $s > k$ so that λ is real and there is a growing solution.

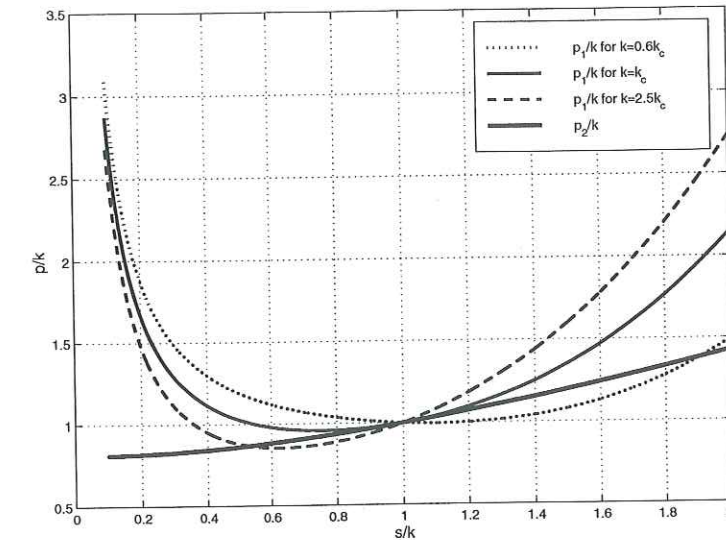


FIG. 2.18 – The functions $\bar{p}_2(\bar{s})$ and $\bar{p}_1(\bar{s})$ for different values of k . The analysis of these functions give the proof of the existence of the cut off at k_c in the dominant part.

Appendix D: Dominant Eigenfunctions Here we give the y dependent functions $\Phi^k, \Psi^k, u_x^k, u_y^k, \sigma_{yy}^k, \sigma_{xy}^k, \sigma_{xx}^k$ for the dominant eigenfunctions.

$$\Phi^k(y) = 2ks(k)e^{-p(k)y}$$

$$\Psi^k(y) = (s^2(k) + k^2)e^{-s(k)y}$$

$$u_x^k(y) = s(k) (-2k^2 e^{-p(k)y} + (s^2(k) + k^2)e^{-s(k)y})$$

$$u_y^k(y) = k (-2p(k)s(k)e^{-p(k)y} + (s^2(k) + k^2)e^{-s(k)y})$$

$$\sigma_{xy}^k(y) = \rho v_s^2 (4k^2 p(k)s(k)e^{-p(k)y} - (s^2(k) + k^2)^2 e^{-s(k)y})$$

$$\sigma_{yy}^k(y) = 2\rho v_s^2 ks(k)(s^2(k) + k^2)(e^{-p(k)y} - e^{-s(k)y})$$

$$\sigma_{xx}^k(y) = 2\rho v_s^2 ks(k)((s^2(k) - k^2 - 2p^2(k))e^{-p(k)y} + (s^2(k) + k^2)e^{-s(k)y})$$

2.1.3 Extension à l'initiation d'une fissure en mode d'ouverture.

Pour illustrer l'extension de l'analyse des problèmes d'initiation infinie par la méthode utilisée dans le cas plan, nous présentons succinctement des résultats pour le cas d'ouverture (mode I).

Pour le mode d'ouverture, le problème a les symétries inversées du mode plan. $\Phi(t, x, -y) = \Phi(t, x, y)$ et $\Psi(t, x, -y) = -\Psi(t, x, y)$. Sur le bord $y = 0^+$ la traction σ_{yy}

dépend de l'ouverture de la fissure en s'affaiblissant et la symétrie impose que la contrainte de cisaillement σ_{xy} est nulle. Autrement dit la condition au bord linéarisée s'écrit:

$$\sigma_{xy}(t, x, 0^+) = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\sigma_{yy}(t, x, 0^+)}{\rho v_p^2} = -\alpha_c u_y(t, x, 0^+) \quad \alpha_c = \frac{\sigma_s - \sigma_d}{\rho v_p^2 L_c} \quad (2.73)$$

Ici α_c est défini par le taux d'affaiblissement de la traction $(\sigma_s - \sigma_d)/L_c$ normalisé par le module des ondes de dilatation, dite P.

En cherchant une solution du type:

$$\Phi^\lambda(x, y) = e^{ikx}(P_1 e^{py} + P_2 e^{-py}) \quad (2.74)$$

$$\Psi^\lambda(x, y) = e^{ikx}(S_1 e^{sy} + S_2 e^{-sy}) \quad (2.75)$$

on trouve qu'il existe des modes propres de carré positif si $|k| < k_c$ avec $k_c = \frac{\eta^2}{2(1 - 1/\eta^2)} \alpha_c$ et $\eta = v_p/v_s$. Pour des valeurs d'affaiblissement identiques, (mêmes valeurs de σ_s , σ_d et L_c) alors k_c est physiquement le même qu'en mode plan. En effet, rappelons qu'ici α_c est normalisé par le module des ondes de dilatation et non de cisaillement. Par ailleurs le nombre d'onde adimensionnel $\bar{p} = p/k$ vérifie l'équation:

$$\frac{(2 - \eta^2 - \eta^2 \bar{p}^2)^2 - \bar{\alpha}_c \bar{p}(1 - \bar{p}^2)}{4\bar{p}} = \eta \sqrt{\bar{p}^2 - (\eta^2 - 1)} \quad \text{avec } \bar{\alpha}_c = \alpha_c/k \quad (2.76)$$

$$(2.77)$$

Une fois cette équation résolue numériquement on obtient la fonction $p(k)$ et on déduit simplement

$$s(k) = \eta \sqrt{p^2(k) - (\eta^2 - 1)k^2} \quad (2.78)$$

$$\lambda(k) = \pm v_s^2 \sqrt{p^2(k) - k^2} \quad (2.79)$$

La dépendance en y des fonctions propres des potentiels et des déplacements a pour expression:

$$\Phi^k(y) = -(s^2(k) + k^2)e^{-p(k)y}$$

$$\Psi^k(y) = 2kp(k)e^{-s(k)y}$$

$$u_x^k(y) = k(-2p(k)s(k)e^{-s(k)y} + (s^2(k) + k^2)e^{-p(k)y})$$

$$u_y^k(y) = p(k)(-2k^2e^{-s(k)y} + (s^2(k) + k^2)e^{-p(k)y})$$

Leur norme pour le calcul de la partie dominante est:

$$D(k) = \frac{\pi}{s(k)p(k)}(s^2(k) + k^2) \times (4k^2p^2(k)(p(k) - 2s(k)) + s(k)(k^2 + s^2(k))(k^2 + p^2(k))) \quad (2.80)$$

Cette solution a été testée numériquement, mais de manière beaucoup moins approfondie que dans le cas plan. Sur la figure 2.19, on trace la vitesse d'ouverture à un temps donné sur la fissure. Encore une fois, la partie dominante (en trait plein) semble bien reproduire la solution complète en différences finies (en pointillé). On note des valeurs

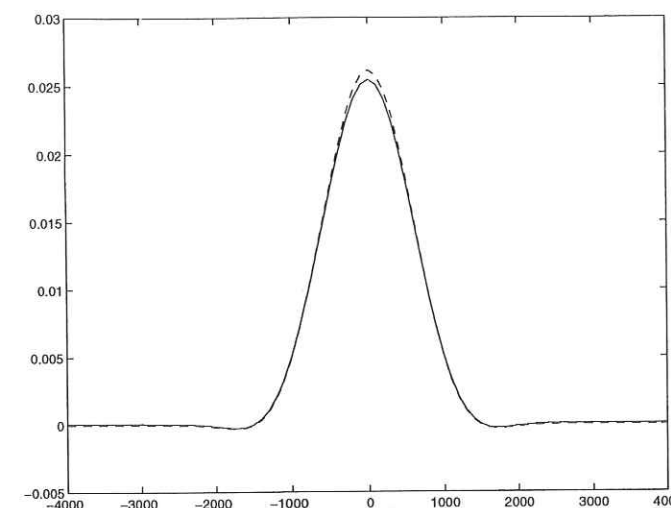


FIG. 2.19 – Un test de la partie dominante pour le mode d'ouverture (mode I). On se place sur la fissure à un temps donné. En trait plein: la partie dominante. En pointillé: la solution complète en différences finies.

négligables au bord de l'ouverture. Ceci est assez logique car une dislocation ou un crack en mode d'ouverture a tendance à créer une compression à ses extrémités. Bien que le problème étudié ici soit lointain de celui du crack, il obéit aussi à cette tendance. Cette non positivité du glissement suggère que l'approximation linéaire de la condition de contact utilisée ici n'est pas compatible avec l'ajout d'une condition de non pénétration.

Pour caractériser la tendance de l'évolution, on peut analyser la fonction propre la plus dominante qui est celle pour laquelle $k = 0$. Ses caractéristiques sont les suivantes:

$$p(0) = \alpha_c; \quad s(0) = \eta\alpha_c; \quad \lambda(0) = v_p\alpha_c$$

$$u_x^0(y) = 0$$

$$u_y^0(y) = \eta^2 \alpha_c^3 e^{-\alpha_c y}$$

Donc le glissement décroît de la faille en $e^{-\alpha_c y}$ et croît en temps en $e^{v_p \alpha_c t}$. En se souvenant de la nouvelle normalisation de α_c , on peut comparer ces deux propriétés avec celles du cas plan, pour des valeurs d'affaiblissement identiques (mêmes valeurs de σ_s , σ_d et L_c). D'une part, le facteur d'évanescence exponentiel est $1/\eta^2$ fois moins important donc le déplacement décroît beaucoup moins vite de la faille. D'autre part, le facteur de croissance exponentiel du glissement est $1/\eta$ fois moins important et donc le glissement croît moins vite en temps.

2.2 Initiation confinée sur une faille finie.

2.2.1 Initiation d'une faille finie antiplane. Principes et approche spectrale.

Nous exposons les résultats concernant l'initiation des failles finies antiplanes avec une loi de frottement dépendante du glissement. D'une certaine manière, nous abordons ici le problème de base de l'initiation hétérogène. Le modèle ci-dessous peut se rapporter à une faille macroscopique, dont la finitude est une nécessité géologique. Il peut aussi servir de base à la modélisation d'une hétérogénéité permanente ou provisoire dans une faille, à n'importe quelle échelle. Notre définition de la faille finie en initiation est la suivante: la zone de glissement est limitée. A l'intérieur de la zone, la chute de contrainte s'opère avec un affaiblissement progressif. En dehors de la zone, le glissement est nul et, pour y parvenir, on peut soit imposer une résistance statique σ_s infinie et positive, soit donner une contrainte initiale σ_{yz} infinie et négative. A l'intérieur de la zone de glissement, on suppose toujours que le niveau de contrainte initial est égal à la résistance statique donc $\sigma_{yz} = \sigma_s$.

Nous passons tout de suite à la formulation du problème de l'initiation d'une faille finie de longueur $2a$ avec affaiblissement linéaire. La symétrie étant toujours présente, on travaille dans le demi espace $y > 0$. On note aussi w_0 et w_1 les perturbations servant de condition initiale en déplacement et en vitesse. Le problème linéarisé est le suivant:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x, y) = v_s^2 \nabla^2 w(t, x, y) \quad x \in \mathbb{R}, y > 0, t > 0 \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(t, x, 0^+) = -\alpha_c w(t, x, 0^+) \text{ pour } |x| < a, t > 0 \text{ et } w(t, x, 0^+) \leq L_c \quad (2.82)$$

$$w(t, x, 0^+) = 0 \text{ pour } |x| \geq a, t > 0 \quad (2.83)$$

Ce problème a été abordé en premier numériquement par Ionescu & Campillo (1999) et ensuite analytiquement par Dascalu et al. (2000). Notons $\beta = a\alpha_c$ le paramètre adimensionnel fondamental de ce système. β peut aussi bien s'appeler paramètre d'affaiblissement que paramètre de longueur de faille. Physiquement, $\beta = a\alpha_c$ n'est autre que le rapport (à un facteur près) de la longueur de la faille sur la longueur caractéristique du patch instable dans le processus d'initiation libre sur une faille infinie. Suivant la valeur de β , on peut avoir un comportement stable ou instable. Sur la figure 2.20, on voit que la stabilité de la faille dépend de β . Quand β est petit, la faille est stable et inversement quand β est grand, elle est instable. Le seuil de stabilité se situe aux alentours de 1.15.

Lorsque la faille est instable, Ionescu & Campillo (1999) montrent que le temps d'initiation dépend de la taille de la faille. Cet effet est montré sur la figure 2.21. Près de la transition stable/instable, le temps d'initiation devient très grand. Loin de cette transition, il se rapproche du temps d'initiation d'une faille infinie.

Tous ces résultats sont interprétables par l'analyse spectrale. Rappelons que le problème est initialement défini par (2.81), (2.82) et (2.83). Le problème spectral correspondant est le suivant:

$$v_s^2 \nabla^2 w^\lambda(x, y) = \lambda^2 w^\lambda(x, y) \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial w^\lambda}{\partial y}(x, 0^+) = -\alpha_c w^\lambda(x, 0^+) \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, |x| < a \quad (2.85)$$

$$w^\lambda(x, 0^+) = 0 \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, |x| \geq a \quad (2.86)$$

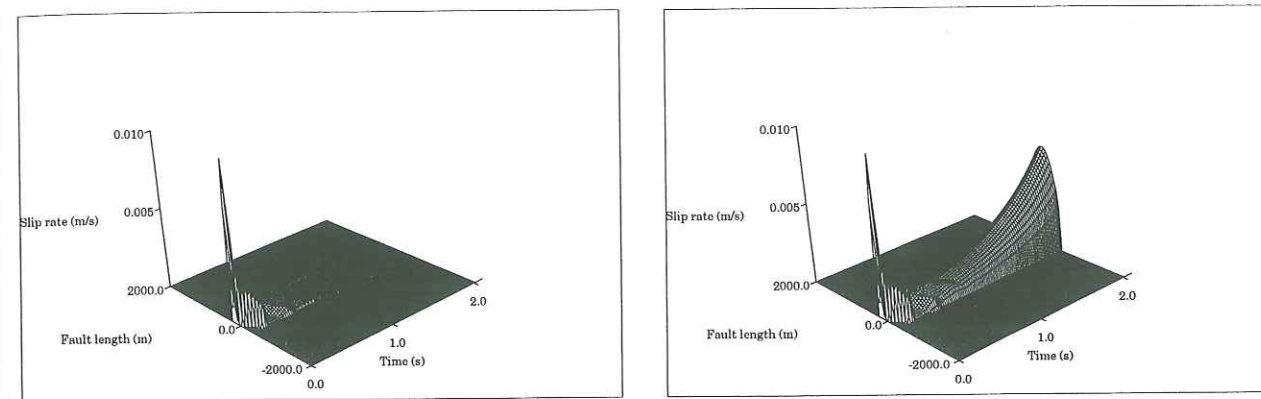


FIG. 2.20 – La stabilité de la faille finie. A gauche: pour $\beta = 1.1$ et pour des valeurs inférieures, la perturbation meurt: la faille est stable. A droite: pour $\beta = 1.2$ et pour des valeurs supérieures, la perturbation déclenche le glissement: la faille est instable. D'après Dascalu et al. (2000).

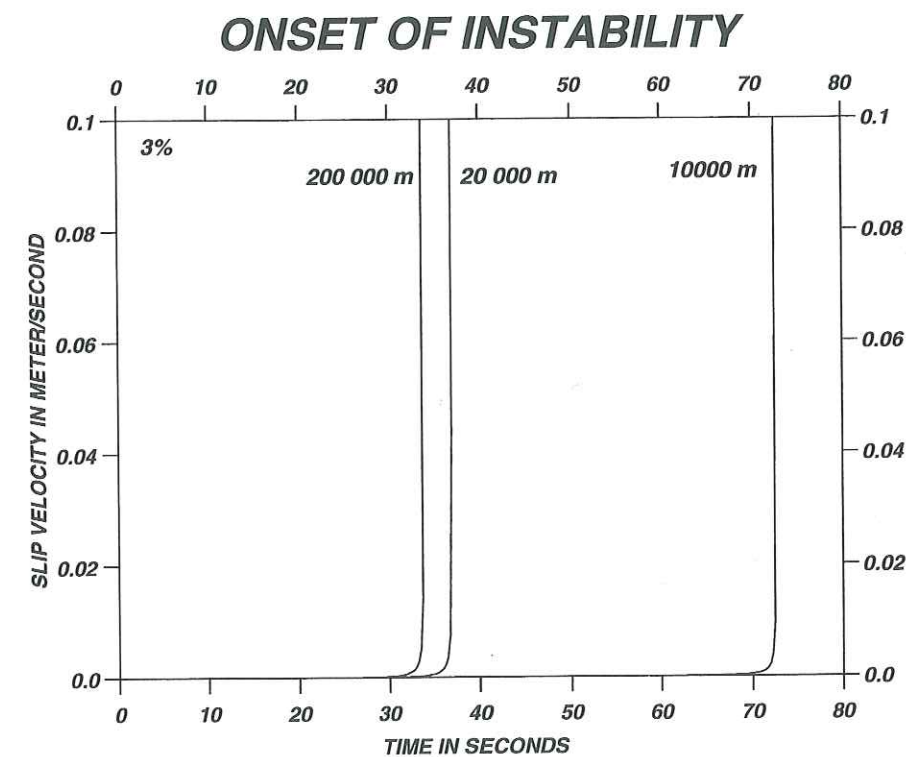


FIG. 2.21 – Le temps d'initiation en fonction de la taille de la faille. Partant d'une grande faille, où le temps d'initiation est proche de celui de la faille infinie, le temps d'initiation augmente avec le rétrécissement de la faille. Près du point de stabilité, il devient infini. D'après Ionescu & Campillo (1999).

Tout d'abord Dascalu et al. (2000) donnent les propriétés du spectre dans le problème défini par (2.84), (2.85) et (2.86). Le spectre est discret et infini. Les valeurs propres sont notées λ_n . Du fait de la nature de la condition de bord, elles ont un carré réel. On les classe dans l'ordre $\lambda_0^2 > \dots > \lambda_n^2 > \dots$. Leur carré $\lambda_n^2(\beta)$ est une fonction continue et croissante de la variable $\beta = a\alpha_c$. Leur disposition est montrée génériquement sur la figure 2.22. Chacune d'elles coupe l'axe des abscisses en $\beta = \beta_n$. Les β_n sont donc les valeurs propres du sous-problème dit "statique" et vérifient simplement $\lambda_n^2(\beta_n) = 0$. On remarque que $0 > \beta_0 > \dots > \beta_n > \dots$.

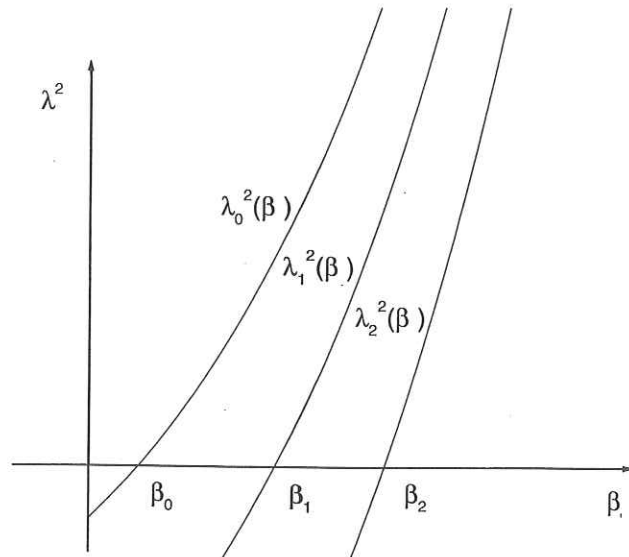


FIG. 2.22 – La disposition des valeurs propres pour la faille finie antiplane en initiation, d'après Dascalu et al. (2000). Les carrés des valeurs propres sont des fonctions réelles, continues et croissantes de la variable $\beta = a\alpha_c$. Chacune d'elles $\lambda_n^2(\beta)$ coupe l'axe des abscisses en $\beta = \beta_n > 0$. Les β_n sont les valeurs propres du sous-problème dit "statique".

A partir de la figure 2.22, on remarque que la faille est stable lorsque toutes les valeurs propres sont imaginaires (de carré négatif). Pour cela il suffit que $\beta < \beta_0$. Inversement, lorsque $\beta > \beta_0$, la faille est instable et on remarque que le nombre N de valeurs propres réelles (de carré positif) est déterminé par la position de β parmi les β_n . Ce nombre N est tel $\beta_{N-1} < \beta < \beta_N$.

Désormais, lorsque la faille est instable, on note (Φ_n, λ_n) , $n = 0 \dots N$ les N modes propres instables. La partie dominante w^d est la partie de la solution correspondant à ces modes et elle s'écrit:

$$w^d(t, x, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_n(x, y) \left(W_0^n \text{ch}(|\lambda_n|t) + \frac{W_1^n}{|\lambda_n|} \text{sh}(|\lambda_n|t) \right) \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0, t > 0 \quad (2.87)$$

$$W_0^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi_n(x, y) w_0(x, y) dx dy; \quad W_1^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \Phi_n(x, y) w_1(x, y) dx dy \quad (2.88)$$

Lorsque la faille est proche de la stabilité, les N valeurs propres de carré positif sont suffisamment séparées pour que la partie dominante puisse, elle-même, être approchée par un seul mode. On obtient alors:

$$w^d(t, x, y) \approx \Phi_0(x, y) \left(W_0^0 \text{ch}(|\lambda_0|t) + \frac{W_1^0}{|\lambda_0|} \text{sh}(|\lambda_0|t) \right) \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0, t > 0 \quad (2.89)$$

2.2.2 Résultats analytiques et numériques.

Les premiers résultats analytiques ont été développés par Dascalu et al. (2000). Vu que les propriétés intrinsèques de la faille finie sont uniquement liées à ses propriétés spectrales. Nous n'abordons que le problème de la recherche des modes propres instables. Nous n'évoquons pas le calcul final de la partie dominante pour une perturbation donnée. D'ailleurs, la recherche des modes propres par des méthodes analytiques ou semi analytique est une difficulté en soi. Plus particulièrement, nous nous limitons au premier mode propre (λ_0, Φ_0) qui, il faut le rappeler, va dominer. Les deux méthodes présentées consistent à fixer la valeur de λ et à rechercher les valeurs de β qui satisfont le problème spectral. Ainsi, au lieu de résoudre $\lambda(\beta)$, nous résolvons $\beta(\lambda)$. Pour tester les résultats, nous utilisons des méthodes numériques de différences finies et d'éléments finis.

Résolution analytique par équation intégrale. Dascalu et al. (2000) reformule le problème spectral (2.84), (2.85) et (2.86) à l'aide d'une équation intégrale, valable pour de petites valeurs de λ , c'est à dire $|\lambda a/v_s| \ll 1$. Cette formulation spectrale s'écrit en fonction du déplacement de l'interface située en $y = 0^+$:

$$\pi \beta w^\lambda(ax', 0^+) = PV \int_{-1}^1 \frac{\partial_x w^\lambda(as', 0^+) ds}{x' - s'} - \left(\frac{a\lambda}{v_s} \right)^2 \int_{-1}^1 w^\lambda(as', 0^+) \ln \left| \frac{a\lambda}{v_s} (s' - x') \right| ds', \quad x \in \mathbb{R}, \left| \frac{a\lambda}{v_s} \right| \ll 1 \quad (2.90)$$

Sans entrer dans les détails techniques qui figurent dans Dascalu et al. (2000), voici les principaux résultats. Tout d'abord, en prenant $\lambda = 0$ dans cette équation, on trouve la série des valeurs propres β_n du problème dit "statique":

$$\pi \beta w^\lambda(ax', 0^+) = PV \int_{-1}^1 \frac{\partial_x w^\lambda(as', 0^+) ds}{x' - s'} \quad (2.91)$$

$$(2.92)$$

On trouve entre autre $\beta_0 = 1.1577 \dots$. Le critère de stabilité de la faille finie est donc $a\alpha_c = \beta > \beta_0 = 1.1577 \dots$. Ensuite, pour des valeurs non nulles de λ , on cherche la série des valeurs propres $\beta_n^{\text{perturb}}(\lambda)$ du problème perturbé par le terme dynamique contenu dans 2.90. L'inverse de la fonction $\beta_0^{\text{perturb}}(\lambda)$ donne la fonction $\lambda_0(\beta)$. Le résultat trouvé par Dascalu et al. (2000) est présenté sur la figure 2.23. Cette courbe permet de déduire l'ordre de grandeur du temps d'initiation en fonction de la finitude de la faille. Près de la stabilité ($\beta = \beta_0$), la première valeur propre λ_0 tend rapidement vers 0 et le temps d'initiation devient infini.

Une autre approche analytique pour le cas antiplan. Une bonne détermination de la première valeur propre λ_0 en fonction du taux d'affaiblissement adimensionnel $\beta = a\alpha_c$ est capitale pour la maîtrise et la compréhension du modèle, mais aussi pour calibrer les méthodes numériques. La méthode utilisée par Dascalu et al. (2000) est très précise pour déterminer le point de transition β_0 . Cependant l'approximation du noyau intégral faite dans (2.90), où le dynamique apparait comme une petite perturbation du statique, perd sans doute sa validité pour de grandes valeurs de $|\lambda_0|a/v_s$. Ici nous exposons une autre approche semi analytique pour prolonger la détermination de la première valeur propre $\lambda_0(\beta)$ pour des valeurs plus grandes, facilement accessibles aux méthodes de différence

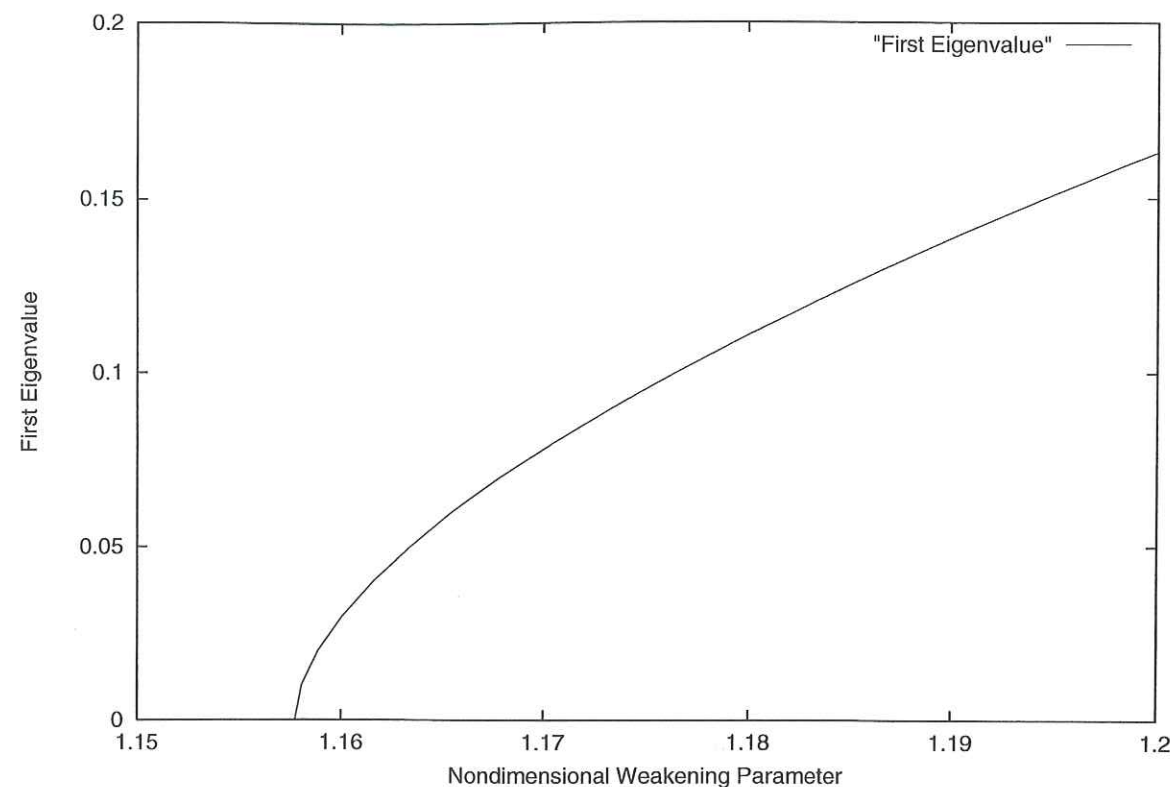


FIG. 2.23 – La première valeur propre $(|\lambda_0|a)/v_s$ en fonction du taux d'affaiblissement adimensionnel β , obtenue par Dascalu et al. (2000).

finies en temps et à la méthode d'éléments finis spectrale. Cela nécessite la formulation du problème en coordonnées elliptiques et l'utilisation des fonctions de Mathieu. On peut trouver des informations complémentaires sur ces fonctions spéciales dans Abramowitz & Stegun (1964), pour une synthèse pratique, ou Mc Lachlan (1947), pour la théorie et les applications.

Les coordonnées elliptiques étant définies comme suit:

$$x = achu \cos v \quad y = ashv \sin v \quad (2.93)$$

alors la lèvres supérieure du segment de faille finie en affaiblissement ($|x| < a, y = 0^+$) est localisé en $(u = 0, 0 < v < \pi)$. Le reste de la faille qui demeure bloqué, c'est à dire $(x \geq a, y = 0)$ et respectivement $(x \leq -a, y = 0)$, est localisé en $(0 \leq u < +\infty, v = 0)$ et respectivement en $(0 \leq u < +\infty, v = \pi)$. Ainsi le problème spectral de la faille finie de longueur $2a$ posé dans ces coordonnées devient:

$$\frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) w^\lambda(u, v)}{\operatorname{ch} 2u - \cos 2v} = 2 \left(\frac{\lambda a}{2v_s}\right)^2 w^\lambda(u, v); \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, 0 \leq u < +\infty, 0 \leq v \leq \pi \quad (2.94)$$

$$w^\lambda(u, 0) = w^\lambda(u, \pi) = 0 \quad 0 \leq u < +\infty \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial w^\lambda}{\sin v \partial u}(0, v) = -a\alpha_c w^\lambda(0, v); \quad 0 < v < \pi \quad (2.96)$$

Comme précédemment, la méthode va consister à chercher les valeurs de $\beta = a\alpha_c$ pour chaque valeur de $q = -\left(\frac{\lambda a}{2v_s}\right)^2$ fixée. q est la nouvelle variable dynamique.

On cherche d'abord les solutions du type séparable vérifiant $f(v)g(w)$ (2.94) et on

déduit:

$$f'' - (b - 2q \operatorname{ch} 2u)f = 0 \quad (2.97)$$

$$g'' + (b - 2q \cos 2v)g = 0 \quad (2.98)$$

avec

$$q = -\left(\frac{\lambda a}{2v_s}\right)^2; \quad q \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b \in \mathbb{R}$$

Pour $g(w)$ nous disposons des solutions de Mathieu périodiques:

$$ce_r(v, q) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^r(q) \cos mv \quad r \in \mathbb{N}$$

$$se_r(v, q) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m^r(q) \sin mv \quad r \in \mathbb{N}$$

Ces solutions peuvent être développées en q pour $|q|$ suffisamment petit en prenant par défaut $A_m^r(q) \approx B_m^r(q) \approx 0$ sauf:

Pour $r < 4$:

$$\begin{aligned} A_0^0(q) &\approx 1 - \frac{q^2}{16}; A_2^0(q) \approx -\frac{q}{2} + \frac{11q^3}{128}; A_4^0(q) \approx \frac{q^2}{32}; A_6^0(q) \approx -\frac{q^3}{1152} \\ A_1^1(q) &\approx 1 - \frac{q^2}{128} - \frac{q^3}{512}; A_3^1(q) \approx -\frac{q}{8} - \frac{q^2}{64} + \frac{q^3}{3072}; A_5^1(q) \approx \frac{q^2}{192} + \frac{q^3}{1152}; A_7^1(q) \approx -\frac{q^3}{9216} \\ A_0^2(q) &\approx \frac{q}{4}; A_2^2(q) \approx 1 - \frac{19q^2}{288}; A_4^2(q) \approx -\frac{q}{12}; A_6^2(q) \approx \frac{q^2}{384} \\ A_1^3(q) &\approx \frac{q}{8} + \frac{q^2}{64}; A_3^3(q) \approx 1 - \frac{5q^2}{512}; A_5^3(q) \approx -\frac{q}{16}; A_7^3(q) \approx \frac{q^2}{640} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^1(q) &\approx 1 - \frac{q^2}{128} + \frac{q^3}{512}; B_3^1(q) \approx -\frac{q}{8} + \frac{q^2}{64} + \frac{q^3}{3072}; B_5^1(q) \approx \frac{q^2}{192} - \frac{q^3}{1152}; B_7^1(q) \approx -\frac{q^3}{9216} \\ B_2^2(q) &\approx 1 - \frac{q^2}{288}; B_4^2(q) \approx -\frac{q}{12}; B_6^2(q) \approx \frac{q^2}{384} \\ B_1^3(q) &\approx \frac{q}{8} - \frac{q^2}{64}; B_3^3(q) \approx 1 - \frac{5q^2}{512}; B_5^3(q) \approx -\frac{q}{16}; B_7^3(q) \approx \frac{q^2}{640} \end{aligned}$$

Pour $r \geq 4$:

$$A_{r\pm 4}^r(q) \approx B_{r\pm 4}^r(q) \approx \frac{(r \pm 1)}{32(r \pm 2)} q^2$$

$$A_{r\pm 2}^r(q) \approx B_{r\pm 2}^r(q) \approx \mp \frac{r \pm 1}{4} q$$

$$A_r^r(q) \approx B_r^r(q) \approx 1 - q^2 \frac{r^2 + 1}{16(r^2 - 1)^2}$$

On remarque que $\lim_{q \rightarrow 0} ce_r(v, q) = \cos(rv)$ et $\lim_{q \rightarrow 0} se_r(v, q) = \sin(rv)$.

La condition limite à l'extérieur de la faille (2.95) impose de prendre pour $g(w)$ des fonctions du type $se_r(w, q)$.

Par ailleurs pour $f(v)$ les fonctions qui vérifient la condition d'énergie finie avec $\lambda^2 > 0$ (donc $q < 0$) et qui vérifient (2.97) avec la même valeur de b que celle de la fonction $g(w)$ correspondante (c'est à dire chaque $se_r(w, q)$) sont du type:

$$Fse_{2r}(u, q) = -\frac{q}{2r} \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}^{2r} \\ (I_{m-1}(\sqrt{-q}e^{-u})K_{m+1}(\sqrt{-q}e^u) - I_{m+1}(\sqrt{-q}e^{-u})K_{m-1}(\sqrt{-q}e^u)) \\ Fse_{2r+1}(u, q) = i\sqrt{q} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2r+1} \\ (I_m(\sqrt{-q}e^{-u})K_{m+1}(\sqrt{-q}e^u) + I_{m+1}(\sqrt{-q}e^{-u})K_m(\sqrt{-q}e^u))$$

On a la propriété $\lim_{q \rightarrow 0} Fse_r(u, q) = e^{-ru}$.

On cherche alors une solution pour $w^\lambda(u, v)$ sous la forme d'une série:

$$w^\lambda(u, v) = \sum_{r=1}^{\infty} W_r Fse_r(u, q) se_r(v, q) \quad (2.99)$$

Cette solution doit vérifier la condition limite (2.96) non satisfaite jusqu'à maintenant. Elle s'écrit:

$$\sum_{r=1}^{\infty} W_r Fse'_r(0, q) se_r(v, q) = -\beta \sin v \sum_{r=1}^{\infty} W_r Fse_r(0, q) se_r(v, q) \quad 0 < v < \pi \quad (2.100)$$

Pour satisfaire l'égalité (2.100), nous projetons la série sur la base des fonctions $\sin(sv)$ et nous trouvons pour tout $s \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} A_s^r(q) W_r = -\beta \sum_{r=1}^{\infty} B_s^r(q) W_r \quad (2.101)$$

$$A_s^r(q) = Fse'_r(0, q) \int_0^\pi se_r(v, q) \sin(sv) dv \quad (2.102)$$

$$B_s^r(q) = Fse_r(0, q) \int_0^\pi se_r(v, q) \sin(sv) \sin v dv \quad (2.103)$$

Le système de dimension infinie (2.101) fournit un problème généralisé aux valeurs propres pour β et qui dépend de q , donc de λ . Nous l'avons résolu numériquement en le tronquant avec une valeur de r finie, en supposant que la convergence existe pour r infini. Les coefficients des matrices A et B ont été évalués numériquement, en tenant compte des approximations des coefficients $A_m^r(q)$ et $B_m^r(q)$ pour les petites valeurs de q . Rappelons que ces derniers coefficients servent à évaluer les fonctions de Mathieu angulaires $se_r(v, q)$ et radiales $Fse_r(u, q)$.

En prenant une base de cinq fonctions ($r \leq 5$), nous avons recherché numériquement la première valeur propre généralisée β_0 pour différentes valeurs de q . Nous comparons les courbes $\lambda_0(\beta)$ pour différentes méthodes sur la figure 2.24. On constate que les éléments finis et la méthode spectrale avec les fonctions de Mathieu sont en très bon accord. Par les différences finies nous extrayons λ_0 numériquement. Nous supposons que, lors d'une expérience de déclenchement instable, du type de celle qui est sur la figure 2.20 à droite, l'évolution du déplacement $w(t, x, y)$ se fera principalement selon le premier mode et donc

selon la formule (2.89). Pour un temps suffisamment long, les fonctions $ch(\cdot)$ et $sh(\cdot)$ tendent vers la fonction $\frac{e^{|\lambda_0|t}}{2}$ et on obtient plus simplement:

$$w(t, x, y) \approx w^d(t, x, y) \approx \Phi_0(x, y) \left(W_0^0 + \frac{W_1^0}{|\lambda_0|} \right) \frac{e^{|\lambda_0|t}}{2} \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0, t > 0 \quad (2.104)$$

Ainsi, on peut déduire facilement la première valeur propre en calculant:

$$\lambda_0 \approx \frac{1}{v_s \alpha_c} \frac{\partial \ln(w(t, x, y))}{\partial t} \quad x \in \mathbb{R}, y \geq 0, t > 0 \quad (2.105)$$

En pratique, la quantité (2.105), mesurée en différences finies, devient constante et uniforme lorsque l'instabilité est suffisamment développée et que la perturbation initiale devient négligeable. Les différences finies sont en bon accord sauf près du point de transition β_0 . Ceci est normal puisque c'est une méthode qui ne fonctionne vraiment que lorsque les accélérations sont significatives. Donc cette méthode n'est pas appropriée à l'initiation très lente. Par ailleurs, la méthode de Dascalu et al. (2000) semble correcte au tout début mais elle diverge rapidement des autres méthodes en s'éloignant du point critique.

Sur la figure 2.25 on représente la première fonction propre Φ_0 normalisée (en valeur maximale) pour trois valeurs de β . Les trois valeurs de λ_0 correspondantes parcourent trois ordres de grandeur. La décomposition de Φ_0 non normalisée, en coordonnées elliptiques, trouvée par l'étude spectrale est la suivante:

$$\lambda_0 a / v_s = 0.01; q = 2.510^{-5}; \beta = 1.1580 \\ \Phi_0(u, v) \approx Fse_1(u, q) se_1(v, q) - 8.7510^{-2} Fse_3(u, q) se_3(v, q) - 1.7910^{-3} Fse_5(u, q) se_5(v, q) \\ \lambda_0 a / v_s = 0.1; q = 2.510^{-3}; \beta = 1.1688 \\ \Phi_0(u, v) \approx Fse_1(u, q) se_1(v, q) - 8.8510^{-2} Fse_3(u, q) se_3(v, q) - 1.7510^{-3} Fse_5(u, q) se_5(v, q) \\ \lambda_0 a / v_s = 1; q = 2.510^{-1}; \beta = 1.6353 \\ \Phi_0(u, v) \approx Fse_1(u, q) se_1(v, q) - 1.3610^{-1} Fse_3(u, q) se_3(v, q) + 2.8810^{-4} Fse_5(u, q) se_5(v, q)$$

Cette décomposition montre que, pour les petites valeurs de λ , la première fonction propre Φ_0 est portée par le premier terme du développement en série de Mathieu. Cela justifie la troncature du système à $r \leq 5$ pour les valeurs numériques que nous avons utilisées.

Sur la figure 2.25, on constate une chose qui est fondamentale pour l'observabilité de la phase d'initiation. Lorsque l'objet (la faille finie de taille a) est proche de la stabilité (cas $\lambda_0 a / v_s = 0.01$ et $\beta = 1.1580$), le déplacement loin de la faille décroît approximativement comme $e^{-r/a}$ où r est la distance d'observation. Dans cette configuration la distance d'observation est donc à relier à la taille de l'objet a . On peut aussi la relier à $1/\alpha_c$ puisqu'ici $\beta = a\alpha_c$ est proche de 1. Donc, dans ce cas, on peut dire que le champ de déplacement est peu (disons raisonnablement) "localisé" autour de la faille.

Ensuite éloignons nous de la stabilité d'un facteur 10 en terme de valeur propre λ ($\lambda_0 a / v_s = 0.1$). Le "taux d'instabilité" est donc beaucoup plus important mais, par ailleurs, la géométrie a peu changé puisque β est presque identique ($\beta = 1.1688$). On constate que la forme de la fonction propre est très peu changée et donc que la "localisation" du champ de déplacement dans le milieu est inchangée.

Eloignons nous encore d'un facteur 10 ($\lambda_0 a / v_s = 1$). La faille est très instable. Par ailleurs β a aussi changé significativement puisque $\beta = 1.635$. Le glissement à la

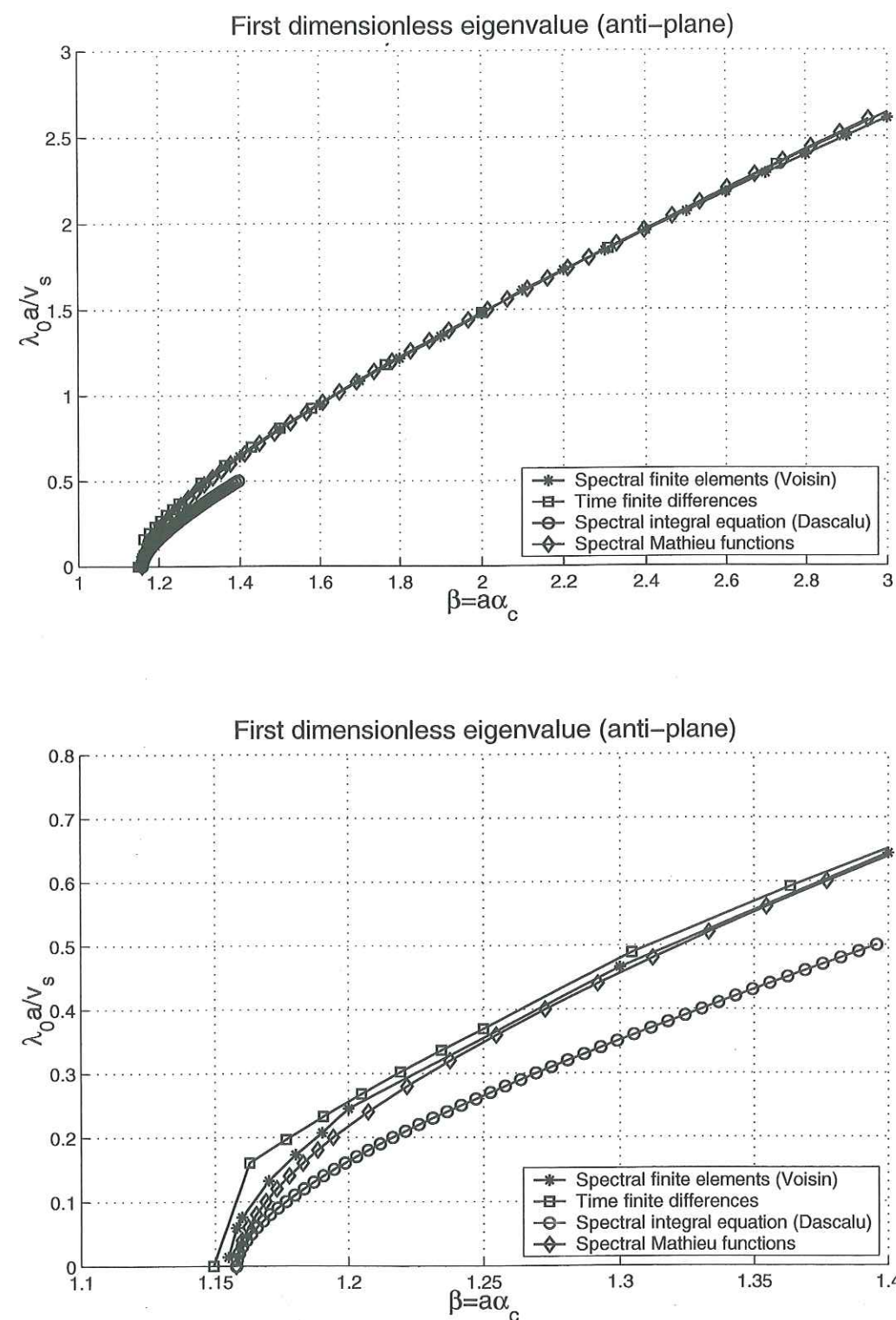


FIG. 2.24 – Problème antiplan. Représentation de la première valeur propre $|\lambda_0|a/v_s$ en fonction de $\beta = \alpha_c$ calculée par différentes méthodes: Spectre en éléments finis par Voisin et al. (2000), spectre extrait des différences finies en temps, spectre de l'équation intégrale par Dascalu et al. (2000) et spectre en coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu. En bas: zoom près du point critique.

même forme sur la faille que précédemment (pas de localisation dans la faille) mais le transport de l'amplitude du déplacement dans le milieu est beaucoup plus faible. Il se rapproche de celui d'une faille infinie (malgré les apparences). En effet le déplacement décroît approximativement comme $e^{-\alpha_c r}$. Cette distinction est très importante puisque cette décroissance est beaucoup plus importante comme le montre la figure 2.25. Loin de la stabilité, elle n'est plus en rapport avec la taille de l'objet.

Une conclusion importante s'impose: on peut penser qu'en général, toute faille en initiation commence par s'initier près de la stabilité. Là, le transport de l'amplitude est favorable à l'observation de l'initiation. Si la loi de frottement est non linéaire, avec un taux d'affaiblissement qui augmente, alors le déplacement va se localiser rapidement autour de la faille, ce qui rendra le processus d'initiation plus difficilement détectable.

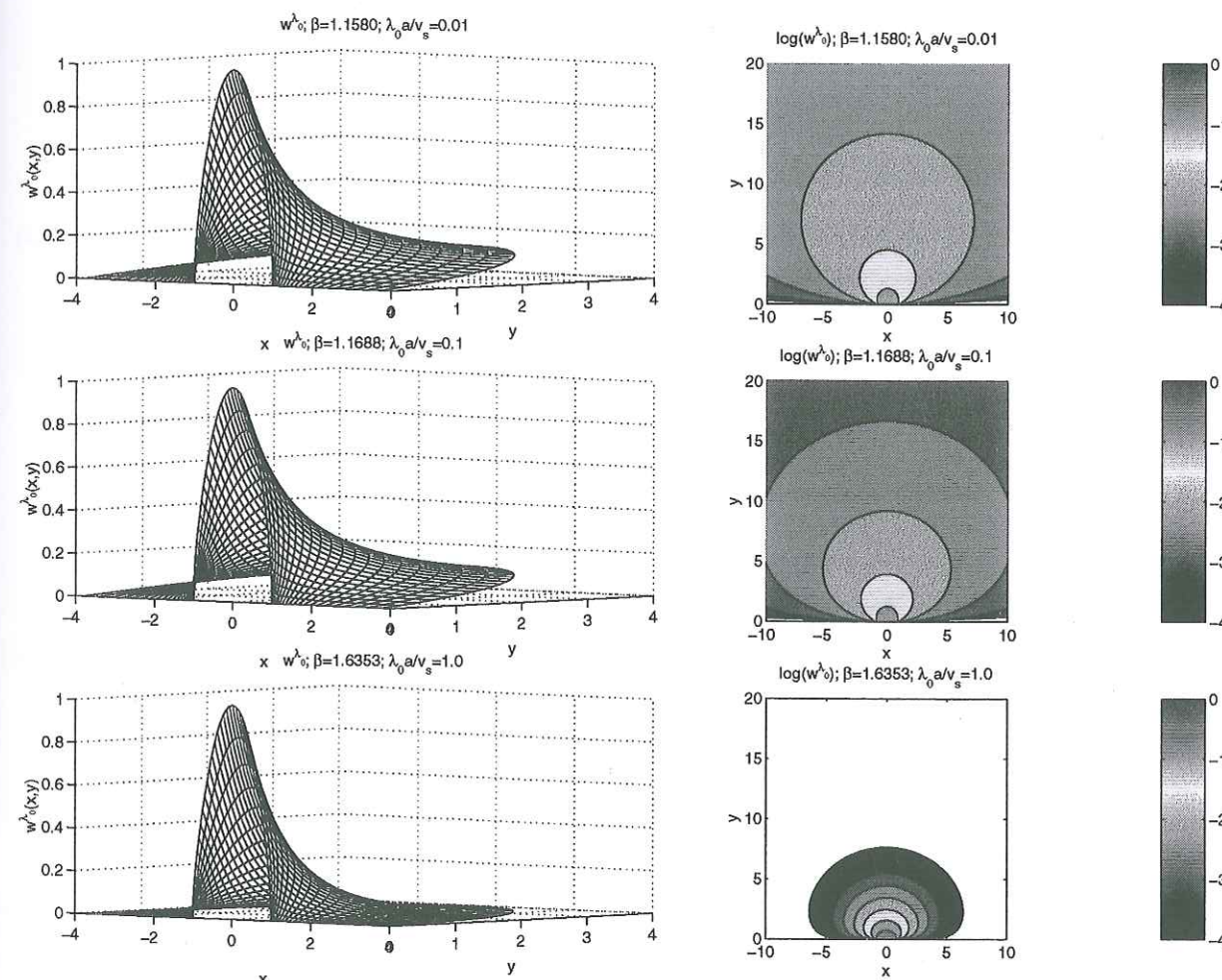


FIG. 2.25 – Problème antiplan. Représentation de la première fonction propre Φ_0 (notée w^{λ_0} sur la figure) pour trois ordres de grandeur différents de la valeur propre. A gauche la fonction propre et à droite les courbes de niveau de son logarithme.

On peut aussi donner une autre représentation intéressante du comportement de la faille finie en la comparant à la faille infinie sur la figure 2.26. Pour cela nous représentons plutôt $\lambda_0/(v_s \alpha_c)$ qui est la première valeur propre divisée par la plus grande valeur propre du problème infini $v_s \alpha_c$. De plus nous la représentons en fonction de $\zeta = 2a/l_c$ qui est la longueur de la faille divisée par la longueur du slipping patch du problème infini (à savoir $l_c = \pi/\alpha_c$). Ainsi on voit mieux en fonction de ces paramètres où la faille se situe du point de vue de la finitude en espace et en temps. Le point critique de stabilité dans

ce diagramme est donné par $\zeta_0 = \frac{2}{\pi}\beta_0 = 0.737\dots$

2.2.3 Une synthèse des résultats sur les failles finies antiplanes et planes.

L'application au problème plan de la méthode spectrale, en coordonnées elliptiques, avec les fonctions de Mathieu, serait plus délicate à cause du couplage entre les potentiels des ondes P et des ondes S. On peut cependant espérer qu'en initiation lente ($|\lambda|$ petit), un changement de variables judicieux dans le problème antiplan puisse permettre de se ramener au problème plan. En effet dans le problème spectral en temps, il existe une relation simple entre les transformées de Fourier en x de la contrainte de cisaillement τ et du déplacement de l'interface en $y = 0^+$. Elle a pour expression dans le cas antiplan:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(k, 0) &= -G \left(\sqrt{(\lambda/v_s)^2 + k^2} \right) \tilde{w}(k, 0^+) \\ \text{pour } |\lambda|/(|k|v_s) &\ll 1 \quad \tilde{\tau}(k, 0) \approx \\ &-G \left(|k| + \frac{1}{2|k|}(\lambda/v_s)^2 \right) \tilde{w}(k, 0^+) \end{aligned} \quad (2.106)$$

et dans le cas plan en notant $\eta = v_p/v_s$:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(k, 0) &= -G \left(-4 \frac{k^2}{(\lambda/v_s)^2} \sqrt{(\lambda/v_p)^2 + k^2} + \frac{(\lambda/v_s)^2 + 4k^2 + 4k^4/(\lambda/v_s)^2}{\sqrt{(\lambda/v_s)^2 + k^2}} \right) \tilde{w}(k, 0^+) \\ \text{pour } |\lambda|/(|k|v_s) &\ll 1 \quad \tilde{\tau}(k, 0) \approx \\ &-G \left(2(1 - 1/\eta^2)|k| + \frac{1}{2|k|}(1 + 1/\eta^4)(\lambda/v_s)^2 \right) \tilde{w}(k, 0^+) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Remarquons d'abord que la condition de validité des développements de Taylor de (2.106) et (2.107) à l'ordre 2 est $|\lambda|/(|k|v_s) \ll 1$, ce qui est intrinsèquement différent de $|\lambda|a/v_s \ll 1$ qui nous intéresse. Pour le problème statique ($\lambda = 0$) elles sont équivalentes. Par contre, la condition $|\lambda|/(|k|v_s) \ll 1$ est une condition qui porte sur le contenu spectral en x du glissement. Cette condition entre en contradiction avec la nullité du glissement imposée en dehors de la faille finie. Nous l'utilisons quand même ... faute de mieux. Elle sera au moins valable dans le cas statique.

Dans (2.106) et (2.107), on reconnaît les mêmes expressions. Pour retrouver (2.107), il suffit de remplacer dans (2.106) le module de cisaillement G par $2(1 - 1/\eta^2)G$ et la valeur

propre λ par $\lambda \sqrt{\frac{1 + 1/\eta^4}{2(1 - 1/\eta^2)}}$. La première conséquence est que les valeurs propres du

problème spectral statique plan seront $2(1 - 1/\eta^2)\beta_n$. Pour $\eta = \sqrt{3}$ on trouve 1.5436... Cette valeur a été confirmée en éléments finis. La première valeur propre est tracée sur la figure 2.27 en comparaison avec les différences finies. Les différences finies respectent un peu moins bien le point critique. Par contre le changement de variable effectué pour prédire le début de la courbe du problème plan semble n'en donner correctement que le tout début, très près du point critique. Au delà, elle est vraisemblablement fausse.

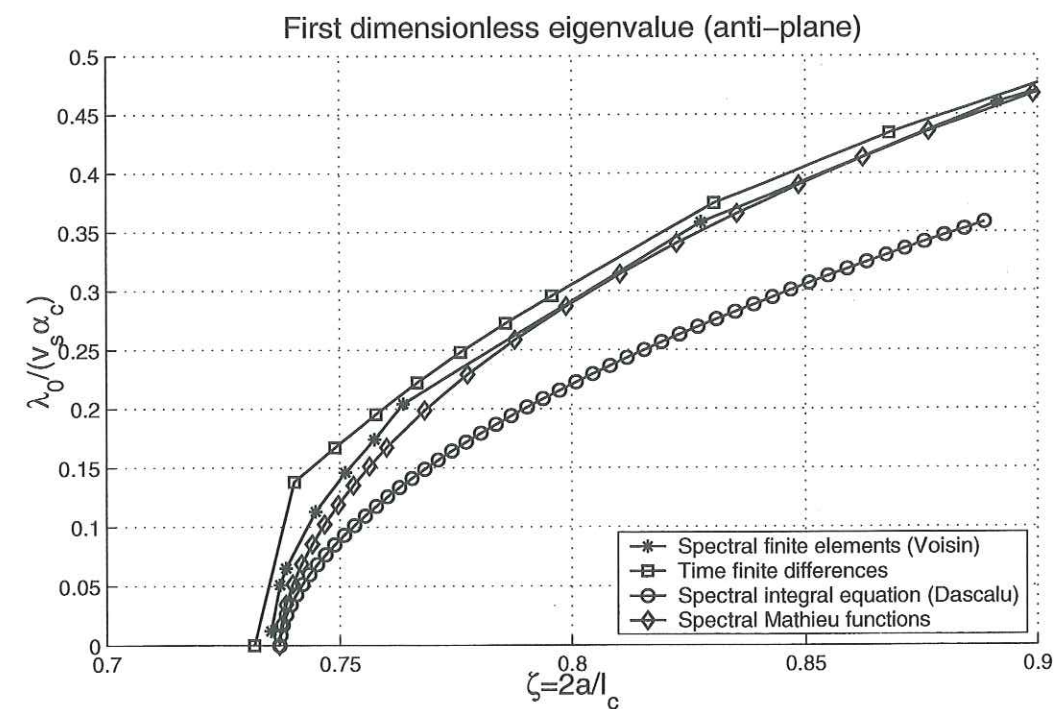
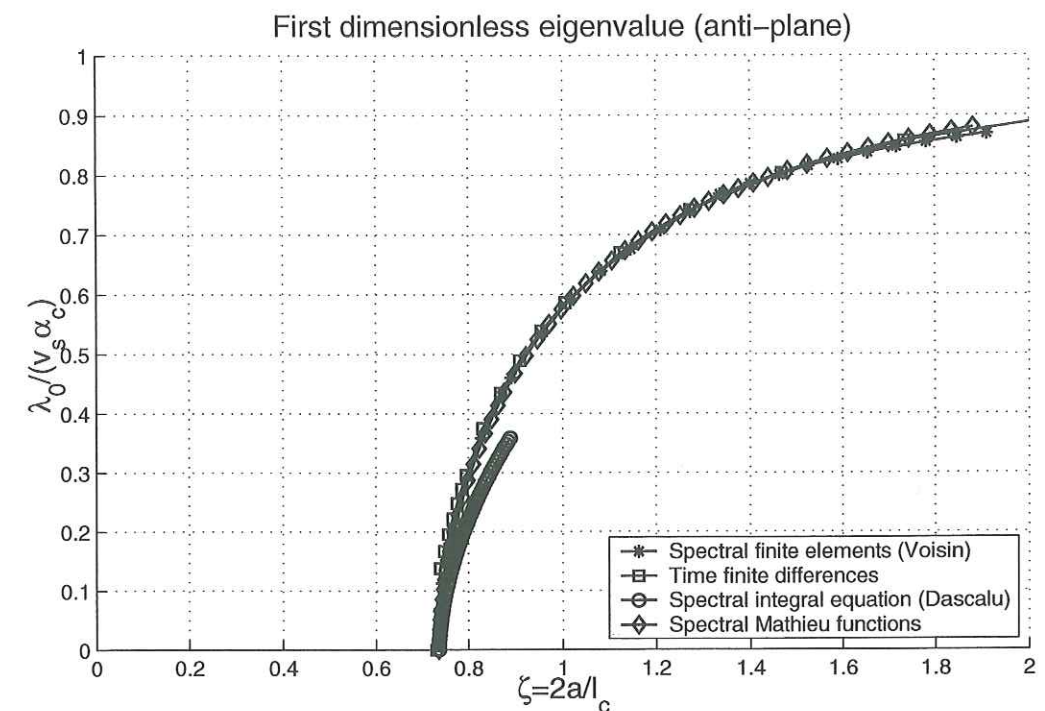


FIG. 2.26 – Problème antiplan. Représentation de la première valeur propre $|\lambda_0|/(v_s \alpha_c)$ en fonction de $\zeta = 2a/l_c$ calculée par différentes méthodes. Spectre en éléments finis par Voisin et al. (2000), spectre extrait des différences finies en temps, spectre de l'équation intégrale par Dascalu et al. (2000) et spectre en coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu. En bas: zoom près du point critique.

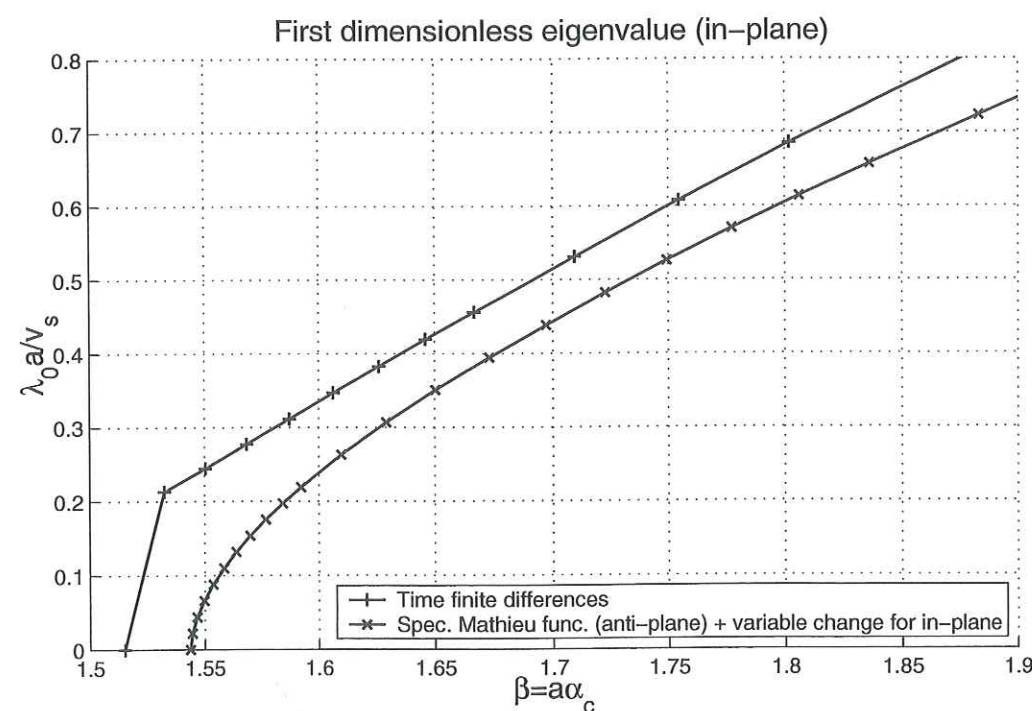
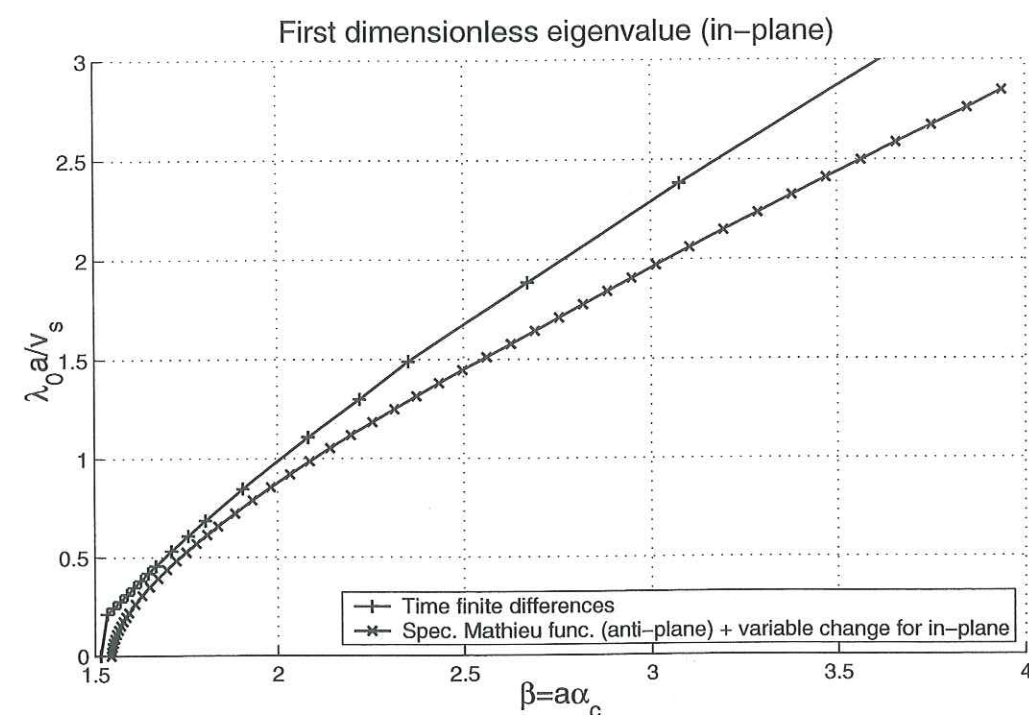


FIG. 2.27 – Problème plan. Représentation de la première valeur propre $|\lambda_0|a/v_s$ en fonction de $\beta = \alpha_c$ pour $v_p/v_s = \sqrt{3}$, calculée par deux méthodes: Spectre extrait des différences finies en temps et changement de variables dans le problème antiplan, résolu en coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu (méthode non valable loin du point critique!). En bas: zoom près du point critique.

Comme on peut le souligner, le terme classique $2(1 - 1/\eta^2)$ a déjà été rencontré dans l'expression du slipping patch en mode plan $l_c = 2(1 - 1/\eta^2)\frac{\pi}{\alpha_c}$. Par ailleurs, quand β est grand, la première valeur propre λ_0 du problème plan tend aussi vers celle du problème infini $v_s\alpha_c$, c'est la raison pour laquelle nous la représentons aussi dans les axes $|\lambda_0|/(v_s\alpha_c)$ et $\zeta = 2a/l_c$ avec celle du problème antiplan sur la figure 2.28.

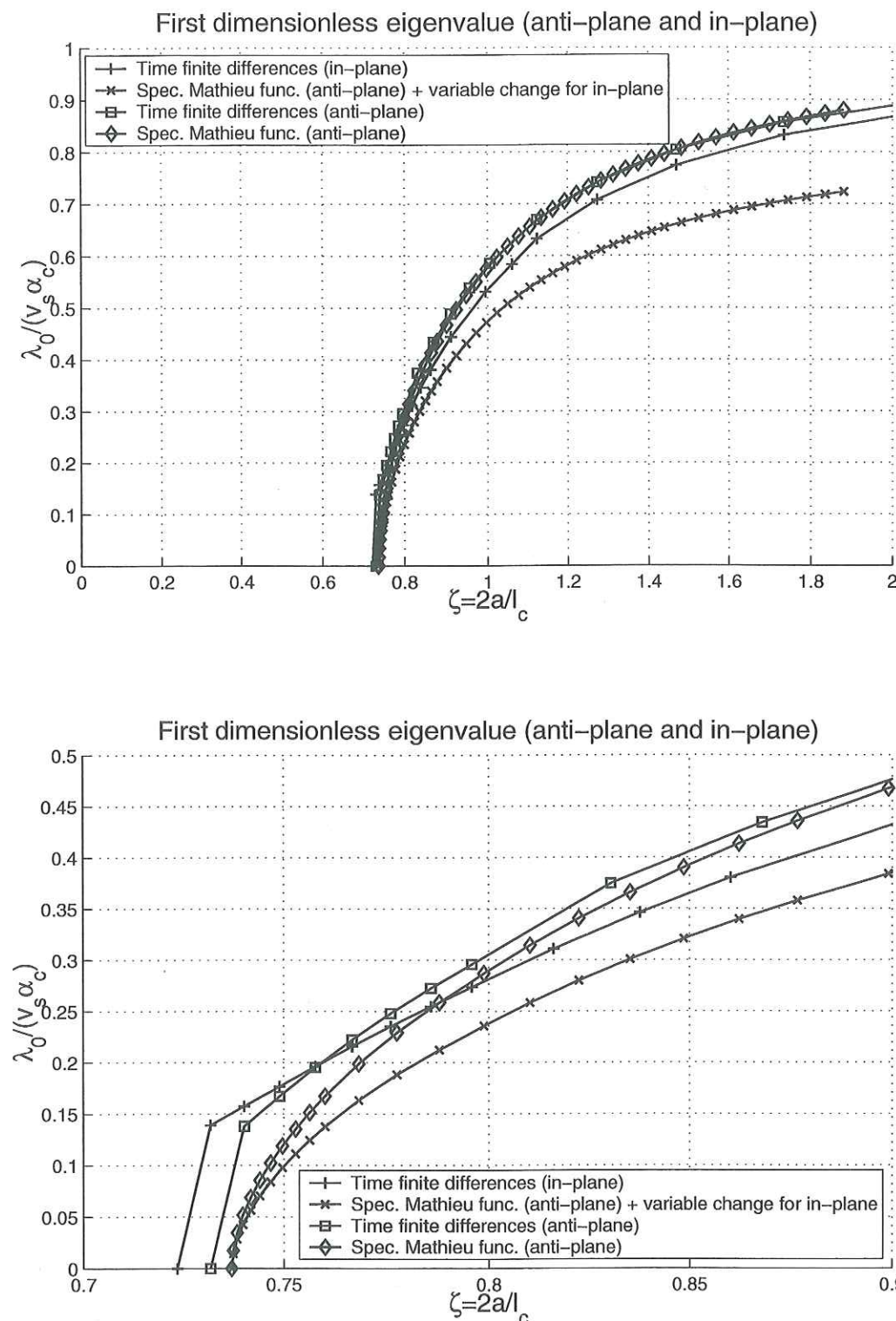


FIG. 2.28 – Représentation de la première valeur propre dans les cas antiplan et plan $|\lambda_0|/(v_s \alpha_c)$ en fonction de $\zeta = 2a/l_c$ pour $v_p/v_s = \sqrt{3}$, calculée par différentes méthodes. En antiplan: Spectre extrait des différences finies en temps et spectre en coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu. En plan: Spectre extrait des différences finies en temps et changement de variables dans le problème antiplan, résolu en coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu (méthode non valable loin du point critique!). En bas: zoom près du point critique.

2.3 L'approximation quasi-dynamique en phase d'initiation.

2.3.1 Définition de l'approximation quasi-dynamique en phase d'initiation.

L'approximation quasi-dynamique consiste à résoudre le demi glissement sur la faille en $y = 0^+$, à l'aide d'une formulation intégrale qui le relie à la contrainte de cisaillement τ . Cette relation s'écrit:

$$\tau(t, x, 0) = -z_s \frac{\partial w(t, x, 0^+)}{\partial t} + \frac{G}{\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_x w(t, s, 0^+)}{x - s} ds \quad (2.108)$$

On note ρ , v_s , $z_s = \rho v_s$, et $G = \rho v_s^2$ la masse volumique, la vitesse des ondes S, l'impédance liée aux ondes S et le module de cisaillement. Dans (2.108) le terme intégral est le champ de contrainte statique engendré par les dislocations tandis que le terme faisant intervenir la vitesse est la pression de radiation instantanée. Ce terme est censé être prépondérant au départ de l'instabilité. S'il y a mouvement alors la contrainte $\tau(t, x, 0)$ est donnée par la loi de frottement et on en déduit la vitesse $\frac{\partial w(t, x, 0^+)}{\partial t}$ d'après (2.108) sinon la contrainte $\tau(t, x, 0)$ est donnée par (2.108) à vitesse nulle, c'est à dire par le champ statique. On voit tout de suite que cette formulation permet de fournir un algorithme de calcul très simple et rapide. Dans le cas d'une loi de frottement dépendante du déplacement, il se résume à un système d'équations différentielles d'ordre 1 en temps. Dans une formulation explicite, il suffit de stocker en mémoire les déplacements $w(t, x, 0^+)$ au temps immédiatement précédent pour en déduire les vitesses au temps suivant et intégrer les nouveaux déplacements.

Nous procédons à la comparaison numérique dans deux cas d'initiation distincts. Le premier cas est l'initiation sur une faille finie avec un fort affaiblissement (loin du point critique) et donc l'évolution est proche de celle d'une faille infinie. Le deuxième cas est l'initiation sur une faille finie avec un faible affaiblissement et on est assez proche du point critique. Pour la solution élastodynamique nous utilisons les différences finies et pour la solution quasi-dynamique nous utilisons une méthode explicite associée à l'équation (2.108). Symboliquement, on note en exposant n, i le temps $t = n\Delta t$ et la position $x = i\Delta l$. Δt et Δl sont les pas de temps et d'espace réguliers. A chaque itération n , on utilise l'algorithme suivant pour déduire l'itération $n + 1$:

$$\begin{aligned} w^{n+\frac{1}{2},i} &= w^{n,i} + v^{n,i} \Delta t / 2 \\ \tau_s^{n+\frac{1}{2},i} &= \frac{G}{2\pi \Delta l} \sum_{j \neq i} \frac{w^{n+\frac{1}{2},j+1} - w^{n+\frac{1}{2},j-1}}{i - j} \\ \tau_f^{n+\frac{1}{2},i} &= S \mu(i, w^{n+\frac{1}{2},i}) \\ v^{n+1,i} &= \max \left(0, \frac{1}{z_s} (\tau_s^{n+\frac{1}{2},i} - \tau_f^{n+\frac{1}{2},i}) \right) \\ w^{n+1,i} &= w^{n+\frac{1}{2},i} + v^{n+1,i} \Delta t / 2 \end{aligned}$$

où $-S$, $S > 0$ désigne toujours la contrainte normale et μ le coefficient de frottement dépendant du glissement. L'affaiblissement est linéaire.

Les résultats pour les deux types de faille finies sont présentés sur la figure 2.29 pour le premier cas et sur la figure 2.30 pour le deuxième cas.

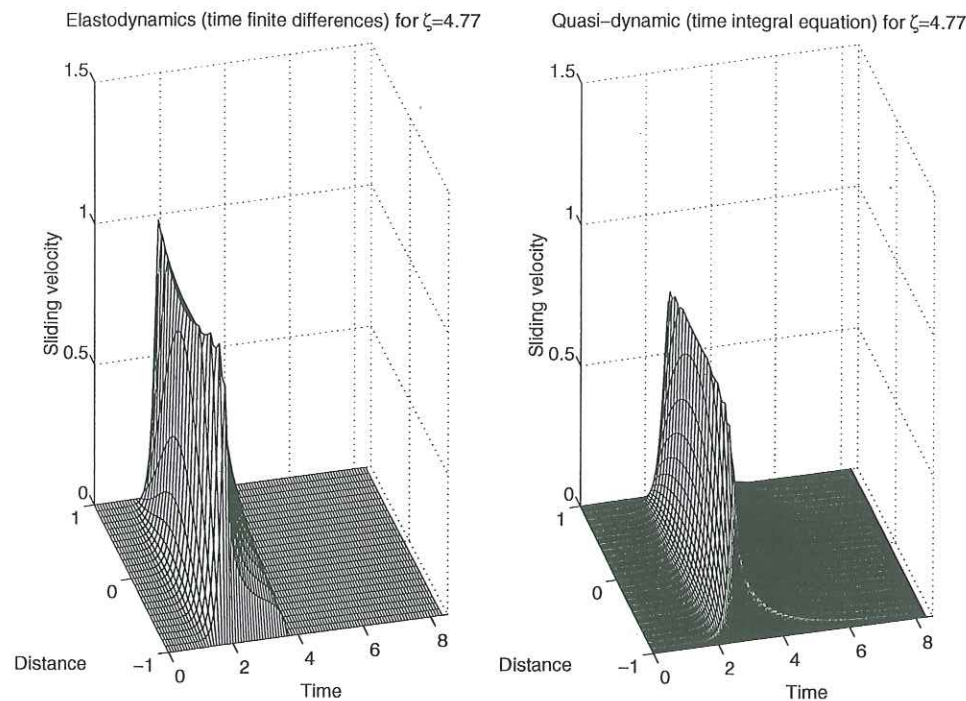


FIG. 2.29 – Comparaison entre la solution élastodynamique (différences finies en temps) et la solution quasi-dynamique (équation intégrale en temps), pour une faille finie loin du point critique.

Dans le premier cas, loin du point critique, on peut dire que la différence entre les deux solutions est faible. Les temps d'initiation et les vitesses de glissement sont comparables. Par contre, l'approximation quasi-dynamique efface les ondes d'arrêt, ce qui est normal puisque cette approximation ne comporte pas de solution propagative. Mais, pour ce qui concerne l'initiation seulement, l'approximation quasi-dynamique est donc assez correcte dans les cas qualitativement proches de la faille infinie. Dans le deuxième cas, près du point critique, on observe que la différence est énorme, surtout pour le temps d'initiation. Donc, paradoxalement, c'est dans le cas le moins dynamique que l'approximation est la plus fautive. Cela montre qu'avec une loi de frottement dépendante du glissement, la propriété d'hyperbolicité de l'élastodynamique a autant d'importance dans les phases de glissement propagatives et radiatives que dans les phases de glissement confinées et non radiatives. Nous allons justifier ceci théoriquement dans la section suivante.

2.3.2 Justification du biais de cette approximation par l'analyse spectrale.

Campillo & Ionescu (1997) pour la faille infinie et Dascalu et al. (2000) pour la faille finie ont montré que la partie dominante est une très bonne approximation de la solution. Cette partie dominante repose sur l'analyse des composantes spectrales "explosives" contenues dans le système linéarisé autour de sa position actuelle. Lorsque le système est instable, c'est la plus grande valeur propre de carré positif notée λ_0 qui donne l'évolution du glissement en $e^{\lambda_0 t}$, ($\lambda_0 > 0$). On va donc se contenter ici de caractériser le système par la première et plus grande valeur propre λ_0 pour interpréter les figures 2.29 et 2.30. Nous rappelons les résultats théoriques suivants. Dans le cas d'une faille infinie homogène, la

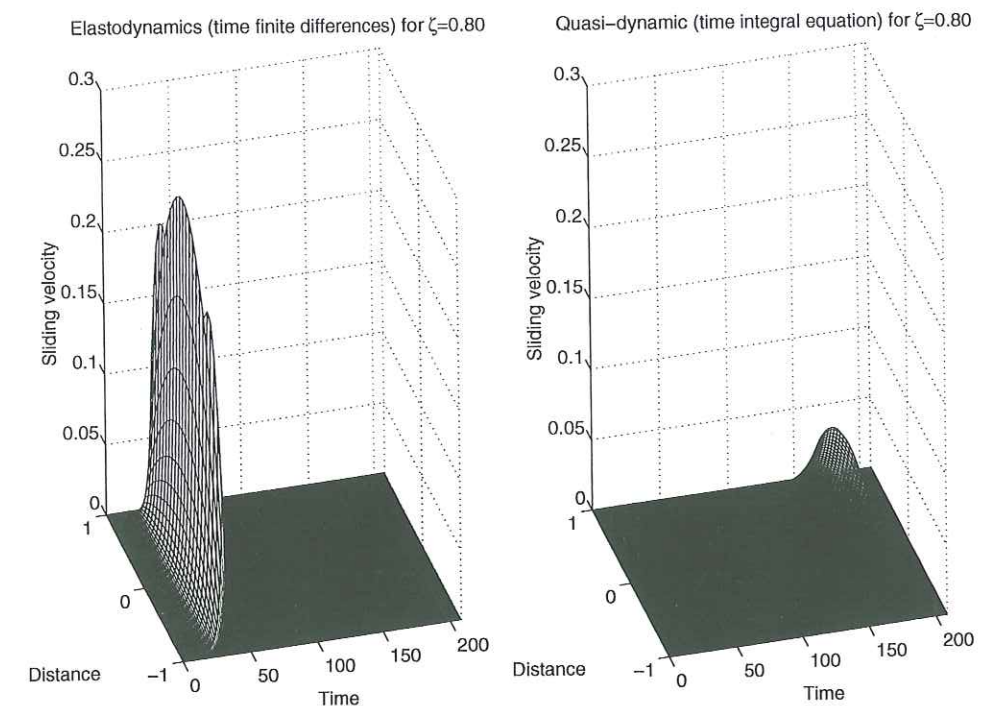


FIG. 2.30 – Comparaison entre la solution élastodynamique (différences finies en temps) et la solution quasi-dynamique (équation intégrale en temps), pour une faille finie proche du point critique.

plus grande valeur propre vaut $v_s \alpha_c$. Cela a été vérifié par le calcul de la solution complète en différences finies. Dans le cas d'une faille finie homogène de demi-longueur a la plus grande valeur propre λ_0 est une fonction de $\beta = a \alpha_c$ paramètre adimensionnel. Lorsque $\beta < \beta_0 = 1.1577 \dots$ on a $\lambda_0^2 < 0$ et le système est stable. β_0 définit le point critique où le système change de régime. Par ailleurs la fonction $\lambda_0(\beta)$, $\beta > \beta_0$ a été étudiée par Dascalu et al. (2000), dans le régime instable en restant très près du point critique et aussi dans ce chapitre, dans des régimes plus instables (méthode spectrale en coordonnées elliptiques et fonctions de Mathieu).

Revenons à l'approximation quasi-dynamique. Pour la comparer avec les résultats précédents nous allons simplement faire son analyse spectrale théorique et la tester numériquement. La formulation spectrale de (2.108) pour le problème d'une faille finie homogène est:

$$-\alpha_c w^\lambda(x, 0^+) = -\frac{\lambda}{v_s} w^\lambda(x, 0^+) + \frac{1}{\pi} PV \int_{-a}^a \frac{\partial_x w^\lambda(s, 0^+)}{x-s} ds$$

ce qui peut se réécrire en prenant des variables adimensionnelles ($x = ax'$ et $s = as'$):

$$-\beta \left(1 - \frac{\lambda}{v_s \alpha_c}\right) w^\lambda(x, 0^+) = \frac{1}{\pi} PV \int_{-1}^1 \frac{\partial_x w^\lambda(s', 0^+)}{x' - s'} ds' \quad (2.109)$$

Dans (2.109) on reconnaît la formulation spectrale du problème statique formulée par Dascalu et al. (2000). Les solutions existent pour $\beta(1 - \lambda/\lambda_{max}) = \beta_n$ où β_n désignent les valeurs propres du problème dit "statique". Ainsi, il existe au moins une valeur propre positive (et elle est la plus grande) lorsque $\beta > \beta_0$ et sa valeur est donnée par:

$$\frac{\lambda_0}{v_s \alpha_c} = 1 - \frac{\beta}{\beta_0} = 1 - \frac{\zeta}{\zeta_0} \quad (2.110)$$

avec $\beta_0 = 1.1577\dots$ ou $\zeta = 0.7370\dots$. Sur la figure 2.31 nous traçons les résultats théoriques et numériques de l'analyse spectrale en quasi-dynamique et nous les comparons avec les résultats théoriques et numériques de l'analyse spectrale en élastodynamique.

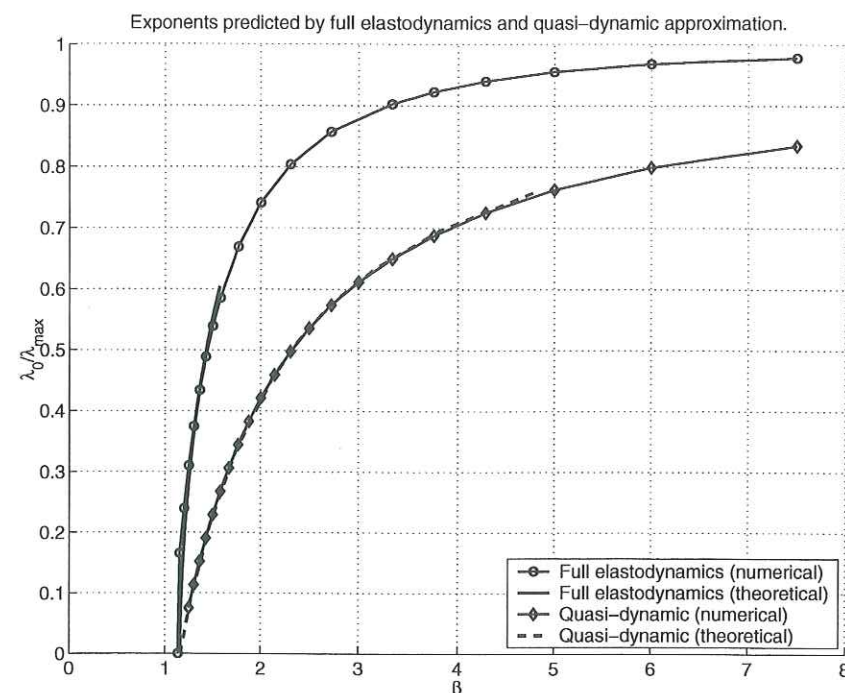


FIG. 2.31 – Comparaison par les analyses spectrales de l'élastodynamique et du quasi-dynamique. Au point critique, la première valeur propre a une tangente verticale en élastodynamique, tandis qu'elle a une tangente définie en quasi-dynamique. Cette différence est essentielle pour la phénoménologie de l'initiation lente.

Pour extraire la première valeur propre λ_0 dans les simulations numériques, nous appliquons toujours la même méthode définie par (2.105).

Remarquons que la formule (2.110) prédit remarquablement les résultats de la simulation numérique. La comparaison entre l'élastodynamique et l'approximation quasi-dynamique devient simple. Pour les grandes valeurs de β , c'est à dire pour les failles infinies et des temps d'initiation courts, l'approximation quasi-dynamique est relativement correcte. Pour les valeurs de β , proches de β_0 , c'est à dire près du point critique et des temps d'initiation grands, l'approximation quasi-dynamique est mauvaise. En effet, très proche du point critique, la courbe en élastodynamique complète admet une tangente verticale tandis que celle de l'approximation quasi-dynamique est inclinée. Plus on s'approche du point critique, plus cette approximation est fautive (elle le devient même infiniment à droite du point critique). En conséquence, l'approximation quasi-dynamique ne permet pas de reproduire le caractère fortement sensible au paramètre β des processus faiblement instables. Autrement dit, près du point critique le moindre changement des paramètres du système (changement de la géométrie par l'érosion des barrières ou changement de l'affaiblissement par la non linéarité de la loi de frottement) doit avoir des conséquences importantes sur la vitesse de croissance du glissement. L'approximation quasi-dynamique minimise énormément les effets "catastrophiques" près du point critique. Cependant on peut tempérer cette analyse. Premièrement, elle dépend du type de loi de frottement. Par exemple, dans les lois de frottement "rate and state", l'analyse spectrale est complètement changée par les échelles de temps contenues dans la loi de frottement. Ainsi, avec ces lois, c'est peut-être la loi de frottement qui impose le type de transition,

plus que les lois de l'élastodynamique. Deuxièmement le problème de la faille finie, tel qu'il a été posé ici, c'est à dire avec une barrière infiniment résistante, exhibe toute la singularité du comportement élastodynamique. Néanmoins, si on tient à utiliser une approximation valable, seule la partie dominante est une approximation objective puisqu'elle approche la solution élastodynamique tandis que les approximations du problème a priori risquent de cacher une partie de l'instabilité.

2.4 Initiation et bi-matériaux.

2.4.1 Le cas antiplan: partie dominante analytique et solution numérique.

Dans le cas antiplan bi-matériaux, la contrainte normale notée $-S$, $S > 0$ ne varie pas et le problème est bien posé. Nous étudions la phase d'initiation et nous donnons l'expression de la partie dominante dans le cas infini. Le matériau à gauche est noté $-$ et celui de droite est noté $+$. On note ρ les densités, v_s les vitesses des ondes S, et $G = \rho v_s^2$ et $z_s = \rho v_s$ les modules et les impédances de cisaillement, On suppose le milieu de droite plus rapide que le milieu de gauche, à savoir $\eta = v_s^+/v_s^- > 1$. Le problème spectral de l'initiation linéarisée est défini de cette manière:

$$\lambda^2 w^\lambda(x, y) = (v_s^+)^2 \nabla^2 w^\lambda(x, y) \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y > 0 \quad (2.111)$$

$$\lambda^2 w^\lambda(x, y) = (v_s^-)^2 \nabla^2 w^\lambda(x, y) \quad \lambda^2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, y < 0 \quad (2.112)$$

$$G^+ \frac{\partial w^\lambda}{\partial y}(x, 0^+) = G^- \frac{\partial w^\lambda}{\partial y}(x, 0^-) = -S\mu' (w^\lambda(x, 0^+) - w^\lambda(x, 0^-)) \quad (2.113)$$

Notons qu'ici, $\mu' = -\frac{\mu_s - \mu_d}{2L_c}$ désigne la dérivée de la loi de frottement par rapport au glissement et non le demi glissement comme dans les problèmes symétriques abordés précédemment. On cherche des solutions en onde plane de la forme:

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, y \neq 0, k \in \mathbb{R}, s^+ > 0, s^- > 0 \quad w^\lambda(x, y) = e^{ikx} \left(a^+ e^{-s^+ y} H(y) + a^- e^{+s^- y} H(-y) \right) \quad (2.114)$$

H désigne la fonction saut de Heaviside. On trouve alors sur k une condition d'existence de solutions de carré positif $\lambda^2 > 0$:

$$|k| < k_c, \quad k_c = \alpha_c^+ + \alpha_c^- \text{ avec } \alpha_c^+ = -\frac{S\mu'}{G^+} \text{ et } \alpha_c^- = -\frac{S\mu'}{G^-} \quad (2.115)$$

Cette coupure spectrale nous permet de définir la longueur de glissement instable (slipping patch) par:

$$l_c = \frac{\pi}{k_c} = \frac{\pi}{\alpha_c^+ + \alpha_c^-} = \frac{\pi L_c G^+ G^-}{S(\mu_s - \mu_d)(G^+ + G^-)/2} \quad (2.116)$$

En notant $\bar{\alpha}_c^\pm = \alpha_c^\pm/k$, et $\bar{s}^\pm/k = s^\pm/k$ alors \bar{s}^- doit satisfaire

$$\frac{\bar{s}^- \bar{\alpha}_c^+}{\bar{s}^- - \bar{\alpha}_c^-} = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1) + (\bar{s}^-)^2} \quad (2.117)$$

Cette équation permet de déduire la fonction $s^-(k)$ et on en déduit alors:

$$s^+(k) = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)k^2 + (s^-(k))^2} \quad (2.118)$$

$$\lambda(k) = \pm v_s^- \sqrt{(s^-(k))^2 - k^2} \quad (2.119)$$

De plus, les amplitudes a^+ et a^- ne sont pas indépendantes. Ainsi la dépendance en y des fonctions propres s'écrit:

$$w^k(y) = G^- s^-(k) e^{-s^+(k)y} H(y) - G^+ s^+(k) e^{+s^-(k)y} H(-y) \quad x \in \mathbb{R}, y \neq 0 \quad (2.120)$$

On calcule la partie dominante à partir des conditions initiales en déplacement $w_0(x, y)$ et en vitesse $w_1(x, y)$. On note $\tilde{w}_0(k, y)$ et $\tilde{w}_1(k, y)$ leur transformée de Fourier en x . Les poids servant à calculer la partie dominante s'en déduisent ainsi:

$$W_0(k) = \frac{1}{D(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}_0(k, y) w^k(x, y) (\rho^+ H(y) + \rho^- H(-y)) dy \quad (2.121)$$

$$D(k) = \frac{\pi}{s^+(k)s^-(k)} (\rho^+ G^+ (s^+(k))^3 + \rho^- G^- (s^-(k))^3) \quad (2.122)$$

Et on déduit alors l'approximation partie dominante:

$$w^d(t, x, y) = \int_{-k_c}^{k_c} e^{ikx} w^k(y) \left(W_0(k) \text{ch}(\lambda(k)t) + W_1(k) \frac{\text{sh}(\lambda(k)t)}{\lambda(k)} \right) dk \quad (2.123)$$

$$(2.124)$$

Nous avons testé cette solution sur un exemple. Les valeurs numériques sont $\rho^+ = 2000 \text{ kgm}^{-3}$, $\rho^- = 3000 \text{ kgm}^{-3}$, $v_s^+ = 3000 \text{ kgm}^{-3}$ et $v_s^- = 1500 \text{ kgm}^{-3}$. Donc $v_s^+/v_s^- = 2$ et $z_s^+/z_s^- = 4/3$. Par ailleurs $S = 100 \text{ MPa}$, $\mu_s - \mu_d = 0.1$ et $L_c = 0.05 \text{ m}$. Enfin la perturbation initiale est une gaussienne 2D de largeur caractéristique de 30 m . Nous comparons la partie dominante avec la solution complète en différences finies sur la figure 2.32. Les courbes à valeur positive représentent la vitesse de glissement à droite (+) tandis que celles à valeurs négatives représentent la vitesse de glissement à gauche (-).

Le plus dominant des modes propres est celui pour lequel $k = 0$. Il donne la tendance générale du glissement. Il a les caractéristiques suivantes:

$$\lambda(0) = v_s^+ \alpha_c^+ + v_s^- \alpha_c^- = \frac{S(\mu_s - \mu_d)}{2L_c} \left(\frac{1}{z_s^+} + \frac{1}{z_s^-} \right) \quad (2.125)$$

$$s^+(0) = \alpha_c^+ + \frac{\alpha_c^-}{\eta} = \frac{S(\mu_s - \mu_d)}{2L_c} \left(\frac{1}{z_s^+} + \frac{1}{z_s^-} \right) \frac{1}{v_s^+} \quad (2.126)$$

$$s^-(0) = \alpha_c^- + \eta \alpha_c^+ = \frac{S(\mu_s - \mu_d)}{2L_c} \left(\frac{1}{z_s^+} + \frac{1}{z_s^-} \right) \frac{1}{v_s^-} \quad (2.127)$$

$$\frac{|w^0(0^+)|}{|w^0(0^-)|} = \frac{z_s^-}{z_s^+} \quad (2.128)$$

L'amplitude du glissement est plus grande dans le milieu de plus petite impédance. Cela se vérifie sur la figure 2.32. Aussi, le glissement décroît plus vite de la faille dans le milieu de plus petite vitesse.

2.4.2 Le cas plan: quelques essais numériques.

Dans le cas plan bi-matériaux, la contrainte normale va évoluer par la perte de symétrie. On suppose tout de même que la faille ou la fissure ne s'ouvre pas: le contact reste bilatéral. Cochard & Rice (1995) montrent que dans le problème de Coulomb, où le coefficient de frottement reste constant, le problème dynamique est mal posé dans certaines conditions de contraste physique. Ils montrent d'ailleurs que les "pulses" de vitesse de glissement trouvés numériquement par Andrews & Ben-Zion (1997) ne convergent pas avec la discrétisation. Pour ce problème de coulomb, Cochard & Rice (1995) proposent d'utiliser une loi de frottement régularisée de type "rate-and-state" modifiée, où la résistance au cisaillement ne répond pas instantanément à la variation de contrainte normale mais nécessite une longueur de glissement critique pour évoluer. Des travaux expérimentaux sur l'acier de Prakash (1998) confirment cette intuition. Le problème que nous abordons

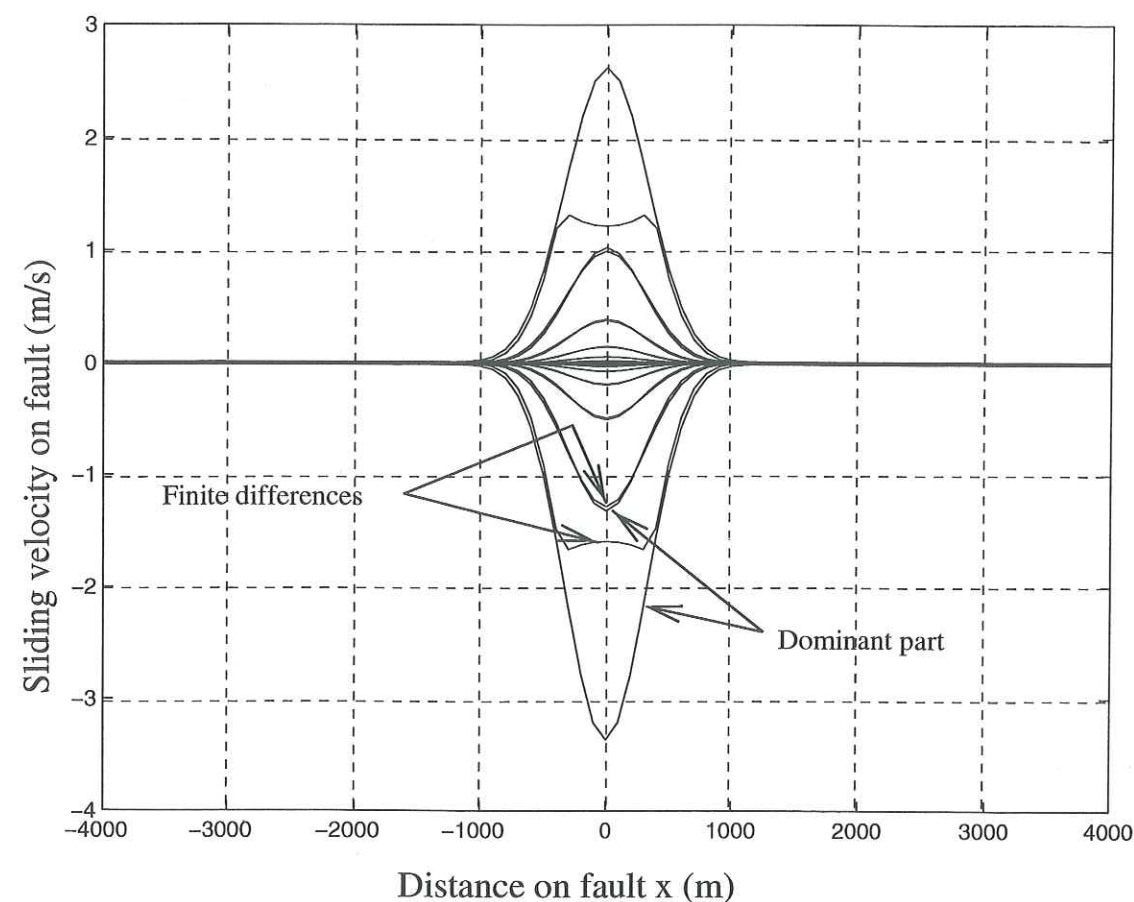


FIG. 2.32 – Initiation en antiplan avec bi-matériaux. Comparaison sur la faille entre la solution complète en différences finies et l'approximation partie dominante. Les courbes à valeur positive représentent la vitesse de glissement à droite (+) tandis que celles à valeurs négatives représentent la vitesse de glissement à gauche (-). Les valeurs numériques sont $\rho^+ = 2000 \text{ kgm}^{-3}$, $\rho^- = 3000 \text{ kgm}^{-3}$, $v_s^+ = 3000 \text{ kgm}^{-3}$ et $v_s^- = 1500 \text{ kgm}^{-3}$. Donc $v_s^+/v_s^- = 2$ et $z_s^+/z_s^- = 4/3$. Par ailleurs $S = 100 \text{ MPa}$, $\mu_s - \mu_d = 0.1$ et $L_c = 0.05 \text{ m}$. Enfin la perturbation initiale est une gaussienne 2D de largeur caractéristique de 30 m .

est très différent puisque nous voulons simplement illustrer une partie des changements apportés par la perte de symétrie dans nos modèles. D'abord, notons que nous avons toujours une chute de contrainte et nous espérons que l'affaiblissement en glissement va régulariser notre problème, au moins en phase d'initiation. Ensuite, nous perturbons le système avec une petite perturbation et ainsi nous ne déstabilisons pas artificiellement le système. Comme nous ne disposons pas de résultat théoriques, nous illustrons numériquement la phénoménologie de l'instabilité à partir d'un exemple où le contraste des vitesses des ondes P et des ondes S est de $4/3$ de part et d'autre de la faille.

Nous utilisons une formulation en affaiblissement linéaire, qui fait intervenir la contrainte normale à l'interface. On note pour toute fonction f , $\delta f(t, x) = f(t, x, 0^+) - f(t, x, 0^-)$. La formulation est la suivante pour tout $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$

$$\delta u_x(t, x) \geq 0; \quad \delta u_y(t, x) = 0; \quad \sigma_{yy}(t, x, 0) < 0; \quad \sigma_{xy}(t, x, 0) > 0 \quad (2.129)$$

$$\sigma_{xy}(t, x, 0) = -\sigma_{yy}(t, x, 0)\mu(x, \delta u_x(t, x)) \text{ si } \delta v_x(t, x) > 0 \quad (2.130)$$

$$\sigma_{xy}(t, x, 0) < -\sigma_{yy}(t, x, 0)\mu(x, \delta u_x(t, x)) \text{ si } \delta v_x(t, x) = 0 \quad (2.131)$$

$$\mu(x, \delta w) = \mu_s(x) + (\mu_s(x) - \mu_d) \frac{\delta w}{2L_c} \text{ si } \delta w < 2L_c \quad (2.132)$$

$$\mu(x, \delta w) = \mu_d \text{ si } \delta w \geq 2L_c \quad (2.133)$$

Cette formulation est restrictive puisque la vitesse de glissement ne doit pas s'inverser et la faille ne s'ouvre pas (contact bilatéral). Pour cela, la contrainte normale doit rester suffisamment compressive et le cisaillement doit aussi garder une valeur positive importante. Ces conditions sont compatibles avec les problèmes de faille en général. Nous étudions un cas homogène et un autre cas avec une barrière franchissable. Les caractéristiques physiques des deux milieux élastiques sont montrées en figure 2.33.

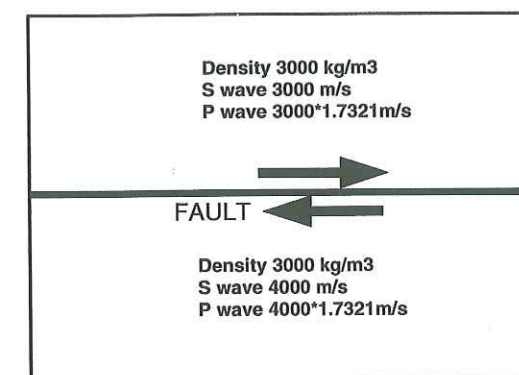


FIG. 2.33 – Caractéristiques physiques des deux milieux élastiques. Les masses volumiques sont les mêmes. Les deux milieux ont le même coefficient de Poisson. Seul le rapport des vitesses des ondes change d'un rapport $4/3$ entre les deux milieux.

Les autres valeurs communes aux simulations qui seront présentées sont: $\mu_d = 0.7$ et $L_c = 0.05 \text{ m}$. L'état de contrainte initial est homogène avec $\sigma_{yy}(0, x, y) = -150 \text{ MPa}$ et $\sigma_{xy}(0, x, y) = -0.8\sigma_{yy}(0, x, y) = 120 \text{ MPa}$. Le déclenchement est opéré par une petite perturbation sur la vitesse de glissement de faible amplitude et légèrement étendue.

Le premier cas homogène est défini par $\mu_s(x) = 0.8$. Ainsi la faille est proche de la rupture partout. La phase de propagation de la perturbation est représentée sur la figure 2.34.

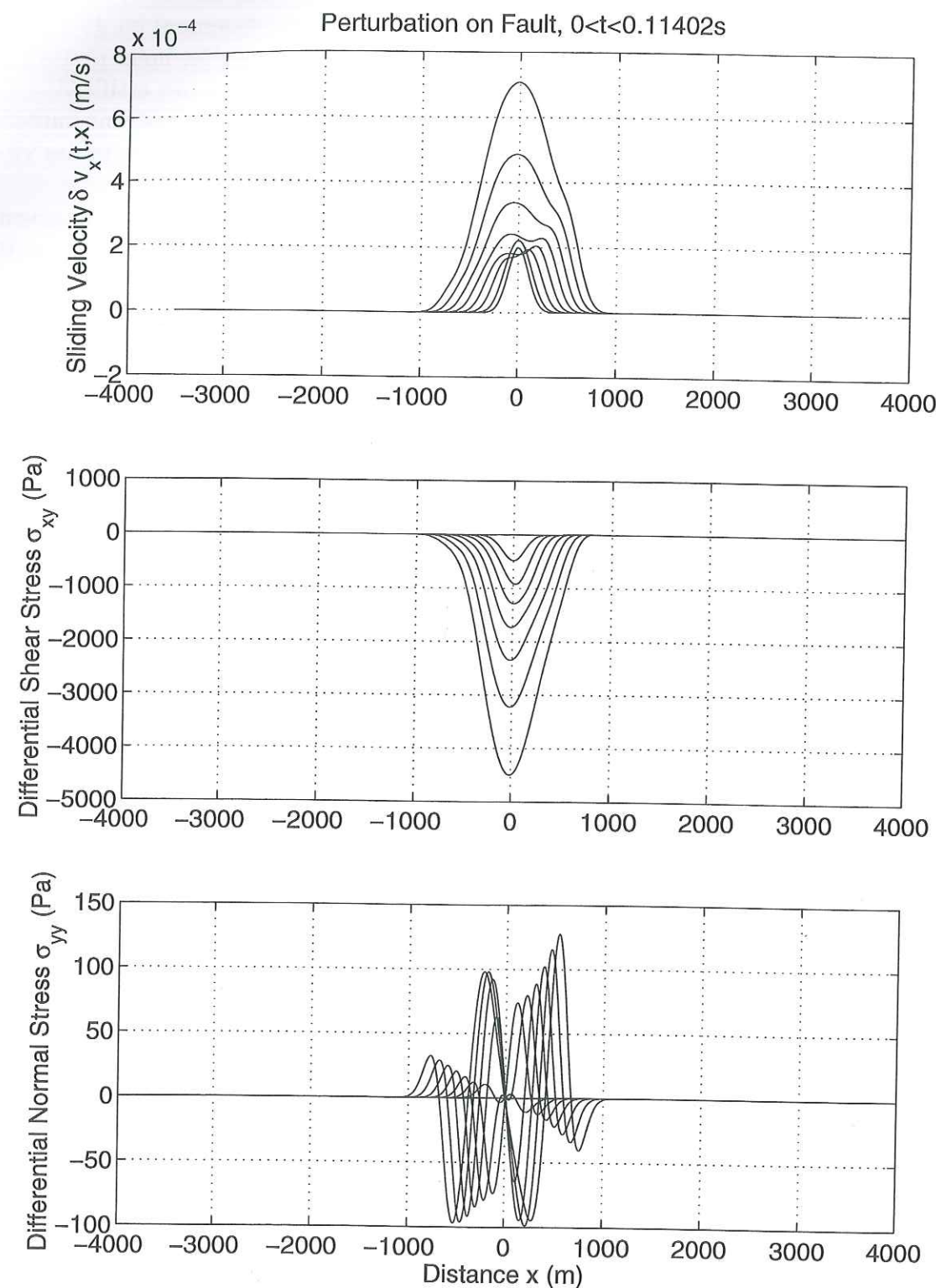


FIG. 2.34 – Propagation de la perturbation sur la faille et début de l'initiation dans le cas homogène. En haut: la vitesse de glissement $\delta v_x(t, x)$. Au milieu: la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(t, x, 0) - \sigma_{xy}(0, x, 0)$ différentielle par rapport au temps initial. En bas: la contrainte normale $\sigma_{yy}(t, x, 0) - \sigma_{yy}(0, x, 0)$ différentielle par rapport au temps initial. La perte de symétrie en x est causée par la petite perturbation mais elle tend à s'effacer.

Durant cette phase, on observe un défaut de symétrie de la vitesse de glissement. Ce défaut est dû aux petites variations de contrainte normale qui ont un retour sur la résistance au cisaillement. Au cours du temps, on voit disparaître la non symétrie car les variations de la contrainte normale deviennent négligeables dans le processus. La non symétrie initiale est un artefact dû à la perturbation.

Pendant la phase d'initiation (figure 2.35) le processus semble très stabilisé autour d'une solution très lisse et symétrique en x , comme dans le cas antiplan. Les variations de la contrainte normale sont trop faibles pour avoir un effet.

Enfin, pendant la phase de propagation du crack (2.36), on ne constate toujours pas d'effet notable de la contrainte normale dans ce cas homogène. L'amplitude des variations de la contrainte normale est de 0.3 MPa tandis qu'elle est de 15 MPa pour la contrainte de cisaillement.

Maintenant nous considérons le cas hétérogène suivant: $\mu_s(x) = 0.8$ pour $|x| < 1 \text{ km}$ et $\mu_s(x) = 0.9$ pour $|x| > 1 \text{ km}$. Ainsi nous avons une zone $|x| < 1 \text{ km}$ où l'initiation peut se développer par une petite perturbation et une zone $|x| > 1 \text{ km}$ où le crack se propage dans une barrière significative parce que l'hétérogénéité du frottement statique μ_s est de l'ordre de grandeur de la chute du frottement $\mu_s - \mu_d$. L'évolution dans la zone d'initiation est semblable à celle observée sur les figures 2.34 et 2.35, à la différence qu'elle s'effectue sur une zone de taille finie $|x| < 1 \text{ km}$. Nous passons donc à la phase de propagation du crack sur la figure 2.37. On y voit la fin de l'initiation puis le crack qui se propage de manière non symétrique en x , en amplitude comme en vitesse de propagation. La pointe qui se propage vers les x positifs voit une augmentation de contrainte normale qui allège la barrière. Elle se propage vite. La pointe qui se propage vers les x négatifs voit une baisse de contrainte normale qui renforce la barrière et qui tend à ralentir la pointe de crack. On note que, contrairement au cas homogène, les variations de la contrainte normale sont du même ordre de grandeur que les variations de la contrainte de cisaillement.

Sur la figure 2.38, on trace les trajectoires des pointes de crack et les cônes de causalité pour les vitesses de phase P et S des ondes élastiques des deux milieux. Les P sont en rouge pointillé et les S en vert plein. Dans le cas homogène, les pointes de crack vont à la vitesse de l'onde P la plus rapide. Dans le cas hétérogène, la pointe de crack lente va au plus à la vitesse de l'onde S lente et la pointe de crack rapide semble aller à la vitesse de l'onde P lente.

En conclusion, dans notre exemple, il s'avère que l'effet de la contrainte normale est faible dans la phase d'initiation. Pour ce qui concerne la phase de propagation du crack, l'effet ne se fait ressentir que lorsque la rupture se propage dans une barrière de frottement statique franchissable mais significative. On peut observer, dans une même simulation, une vitesse de propagation supersonique pour l'un des fronts de rupture et une vitesse subsonique pour l'autre front. Bien que préliminaires ces résultats pourraient être rapprochés des résultats expérimentaux récents de Rosakis et al. (1998).

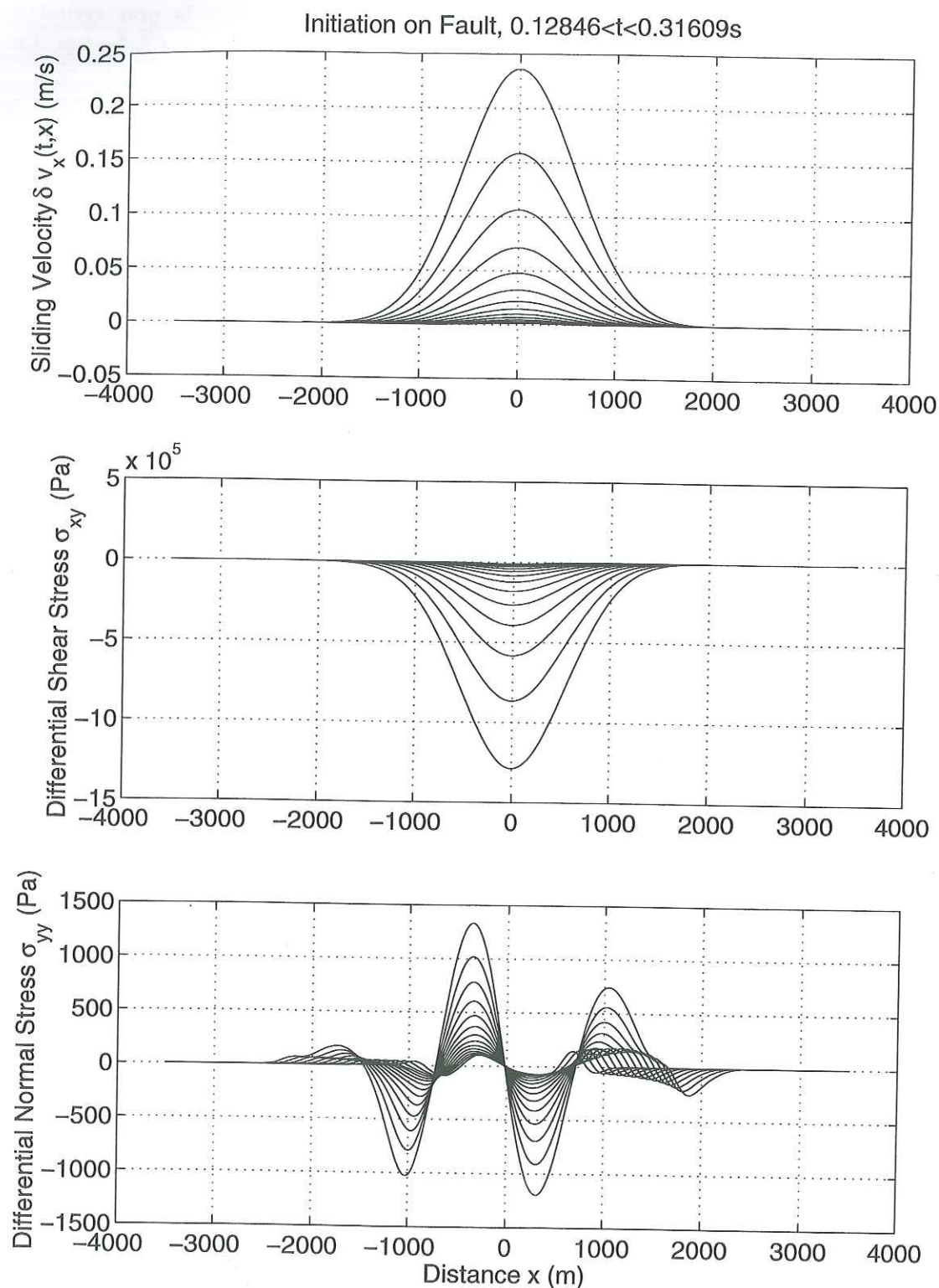


FIG. 2.35 – Initiation sur la faille dans le cas homogène. En haut: la vitesse de glissement $\delta v_x(t,x,0)$. Au milieu: la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(t,x,0) - \sigma_{xy}(0,x,0)$ différentielle par rapport au temps initial. En bas: la contrainte normale $\sigma_{yy}(t,x,0) - \sigma_{yy}(0,x,0)$ différentielle par rapport au temps initial. La perte de symétrie en x est quasiment nulle.

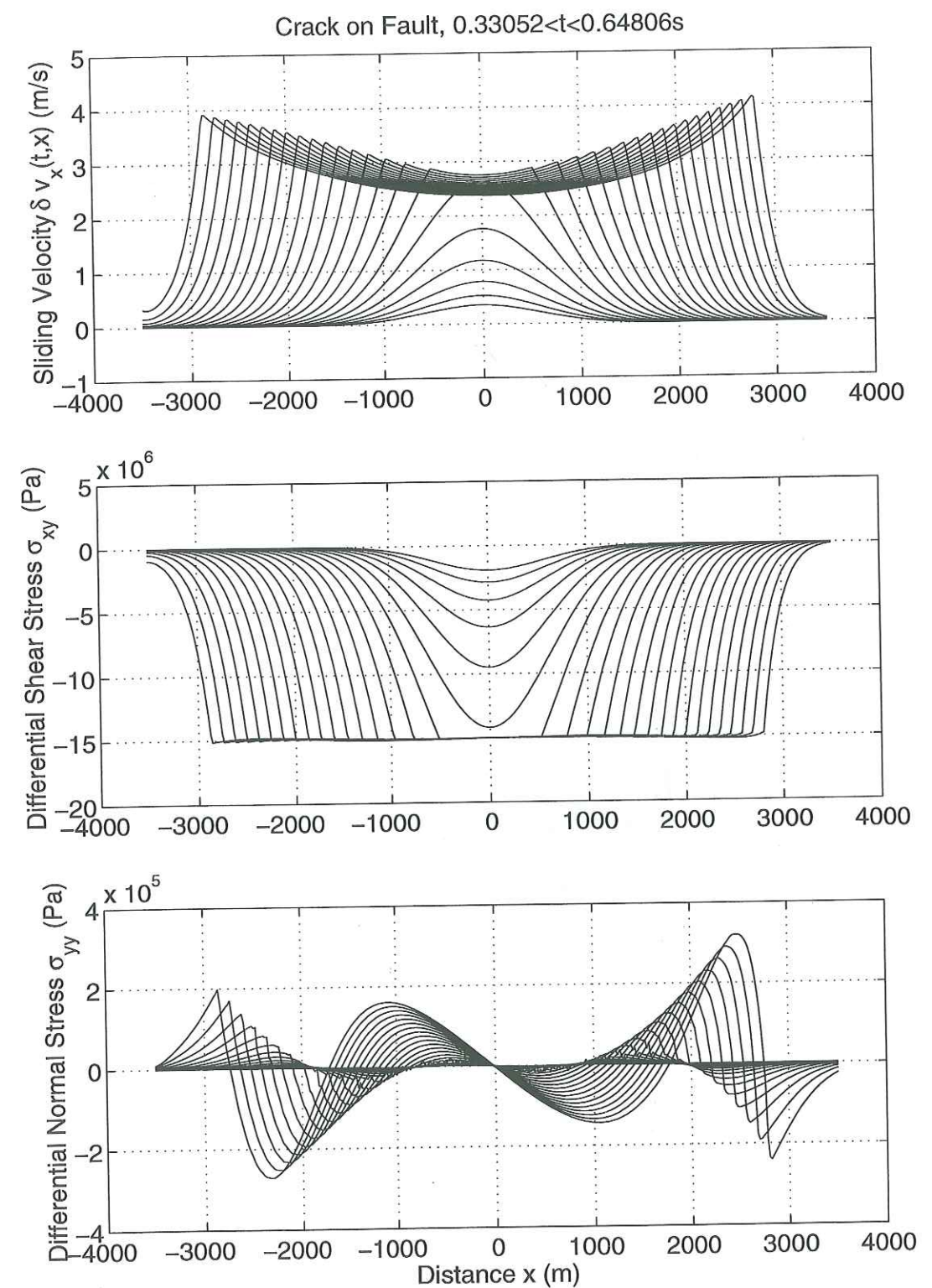


FIG. 2.36 – Crack sur la faille dans le cas homogène. En haut: la vitesse de glissement $\delta v_x(t,x,0)$. Au milieu: la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(t,x,0) - \sigma_{xy}(0,x,0)$ différentielle par rapport au temps initial. En bas: la contrainte normale $\sigma_{yy}(t,x,0) - \sigma_{yy}(0,x,0)$ différentielle par rapport au temps initial. La perte de symétrie en x est très peu visible dans ce cas homogène.

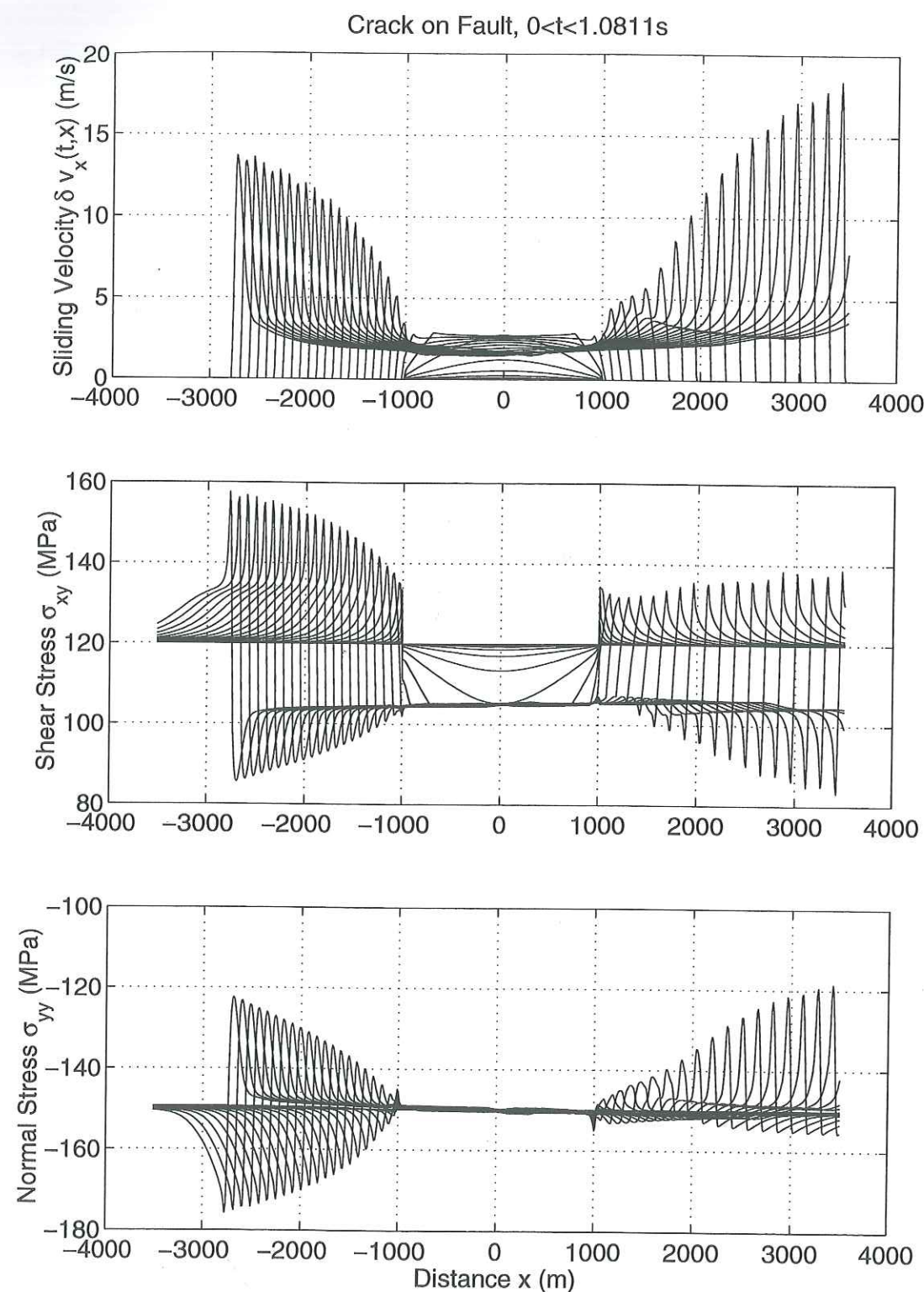


FIG. 2.37 – Propagation du crack dans le cas d'une barrière. En haut: la vitesse de glissement $\delta v_x(t, x, 0)$. Au milieu: la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}(t, x, 0)$. En bas: la contrainte normale $\sigma_{yy}(t, x, 0)$. La perte de symétrie en x n'est sensible que lorsque le crack pénètre dans la barrière. La vitesse de propagation et la vitesse de glissement des pointes de crack sont très différentes à gauche et à droite.

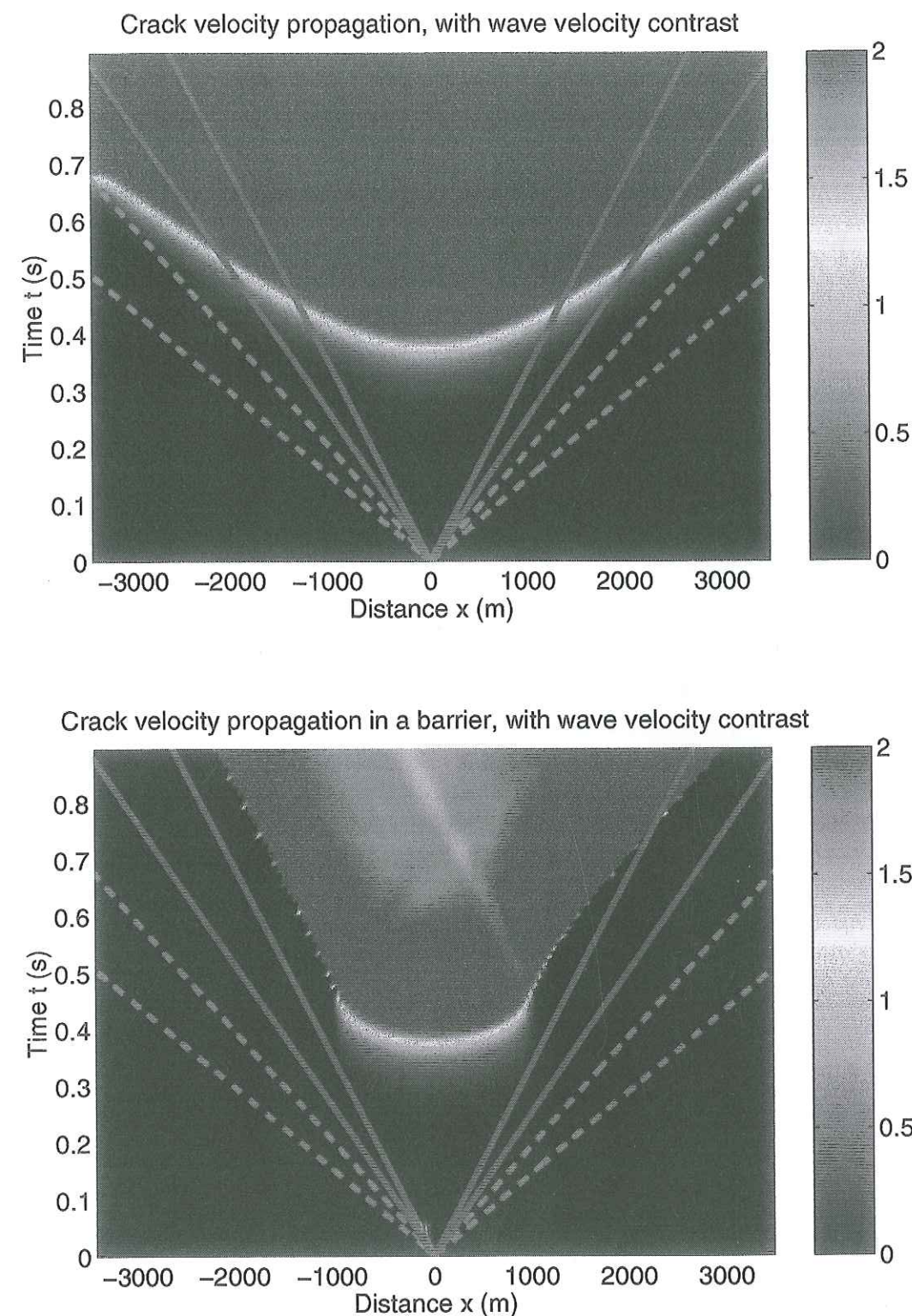


FIG. 2.38 – La vitesse de propagation du crack dans les cas homogène (en haut) et hétérogène (en bas). Cette dernière est visualisée par la représentation en couleur de la vitesse de glissement dans le plan (t, x) . Ainsi on visualise les trajectoires des pointes de crack. Les lignes vertes pleines représentent les droites de causalité des ondes S et les lignes rouges pointillées représentent les droites de causalité des ondes P , dans les deux milieux élastiques.

Chapitre 3

INITIATION TRIDIMENSIONNELLE. IMPLICATIONS.

Les modèles d'initiation sur une faille finie ou infinie homogène bidimensionnelle ont permis de dégager les comportements essentiels de notre modèle d'initiation. Entre autre, nous avons mis en lumière le rapport qui existe entre la géométrie de la zone d'initiation, le taux d'affaiblissement, la stabilité, le temps d'initiation, la forme du glissement sur la faille et le transport (la "localisation") de l'amplitude du déplacement hors de la faille. Nous passons maintenant au cas tridimensionnel. Le cas que nous présentons est un peu particulier puisqu'on considère que le glissement va conserver sa direction. De cette manière, nous n'avons pas à définir de loi de frottement vectorielle. D'autre part, nous ne faisons pas intervenir la contrainte normale. Ainsi les deux corps élastiques de part et d'autre du plan de faille sont symétriques et, lorsque nous introduisons une surface libre dans le modèle, elle reste perpendiculaire au plan de faille pour conserver les symétries. En outre, elle restera aussi parallèle à la direction du glissement.

Dans la première section, nous exposons les aspects théoriques du processus en trois dimensions. Nous généralisons la notion de partie dominante et nous faisons une synthèse des résultats avec les résultats bidimensionnels. Pour ce qui est de la méthode numérique de différences finies, des codes de calcul pour la rupture dynamique existent avec notamment Madariaga et al. (1998) pour de récents travaux. Mis à part les différences finies, on peut aussi trouver des codes en équations intégrales comme par exemple celui de Breitenfeld & Geubelle (1998). Pour notre problème, il a fallu en concevoir un nouveau, dédié à la simulation de la phase d'initiation. Cela a été fait à partir des développements en géométrie antiplane de Ionescu & Campillo (1999). La spécificité de l'initiation sur une faille finie est de forcer des points de la grille de différences finies à subir une évolution lente qui est sans rapport avec un phénomène propagatifs. De plus, cela doit se faire sans créer de bruit ni d'instabilité artificielle. La taille en mémoire et le temps de calcul nous ont limité dans la conduite de tests de convergence systématiques mais on peut avoir une bonne confiance dans les résultats présentés (voir la comparaison avec la solution analytique tridimensionnelle pour la faille infinie).

Dans la deuxième section, nous proposons des expériences numériques simples pour suggérer des méthodes d'observation directe du processus d'initiation. Pour cela nous faisons quelques simulations de "patch" d'initiation, de taille finie, en profondeur et en retirons des informations utiles en surface. Dans un premier temps, cette étude permet de calculer une carte du signal en surface. Les résultats trouvés devraient encourager à raffiner la surveillance des failles actives par des nappes de capteurs. La conclusion de cette étude est que l'observabilité d'un processus d'initiation sera intimement liée à la forme de la non linéarité de l'affaiblissement de la loi de frottement en glissement. Pour

tester ces résultats obtenus en surface par le code de différences finies, nous re-simulons les observations en certains points de la surface par une méthode en fréquence. Cette dernière s'avère logiquement meilleure pour la génération des hautes fréquences dues au crack. Par contre, elle introduit des bruits dans la phase d'initiation. Ainsi, il est très préférable d'utiliser des méthodes temporelles pour simuler des sismogrammes de phase d'initiation.

Enfin, nous présentons l'une des simulations d'initiation conduites sur une faille dont la résistance statique est hétérogène. On peut décrire une phénoménologie d'érosion des barrières par l'intérieur ou de cassure des barrières par encerclement *tout en restant en phase d'initiation* ! Ces expériences ont, elles aussi, un potentiel hautement suggestif pour la surveillance d'une faille en initiation.

3.1 Aspects théoriques et méthode numérique.

3.1.1 Aspects théoriques.

Shear Instability in Three Dimensions: Theoretical and Numerical Studies.

Pascal Favreau, Michel Campillo and Ioan R. Ionescu
Submitted to Journal of Geophysical Research.

Résumé. La nucléation des tremblements de Terre commence par une localisation quasi-statique stable du glissement sur la faille. Cette préparation à long terme est suivie par une phase dynamique et instable que nous appelons initiation. Ici nous étudions analytiquement et numériquement l'initiation en trois dimensions. Le modèle est constitué de deux corps élastiques infinis symétriques en contact sur une interface plane avec une loi de frottement dépendante du glissement. Aidés par les études antérieures en deux dimensions, nous généralisons l'analyse spectrale et l'approximation de partie dominante pour la faille infinie homogène. Pour tester la partie dominante analytique, nous la comparons avec la solution complète numérique dans le cas d'une petite perturbation. Nous donnons aussi une approximation du temps d'initiation. Pour finir, nous étudions numériquement sur un exemple les principaux aspects du processus d'initiation sur une faille finie homogène en trois dimensions. Premièrement, contrairement à la faille infinie, les failles finies admettent un domaine de stabilité dépendant de leur géométrie et plus spécifiquement de leur taille. Deuxièmement, quand la faille est instable et s'initie, le glissement croît principalement sur un mode propre dominant. Troisièmement, le temps d'initiation admet une rapide dépendance envers la géométrie près du point critique.

Abstract. Earthquake nucleation begins with a stable quasi-static localization of the slip on faults. This long term preparation is followed by a dynamic and unstable phase that we call initiation. Here we investigate analytically and numerically the initiation in three dimensions. The model consists of two symmetric infinite elastic bodies in frictional contact on a flat interface with a slip-weakening law. Helped by the previous studies in two dimensions we generalize the spectral analysis and the analytical dominant part approximation for the homogeneous infinite fault. To test the analytical dominant part, we compare it with the numerical complete solution in the case of a concentrated perturbation. We characterize the slip pattern on the fault (pseudo-elliptical), the amplitude in the

bulk (vanishing), the slip growth (exponential). We also give a theoretical approximation of the time of initiation. Finally we study numerically on an example the main features of the initiation process on homogeneous finite faults in three dimensions. First, unlike the infinite fault, finite faults admit a domain of stability depending on their geometry and more especially their size. Second when a finite fault is unstable and initiates, the slip grows mainly on a single dominant eigenmode. Third, the time of initiation admits a sharp dependence on the geometry close to the critical point.

Introduction. Earthquake nucleation on faults is a complex process that can be conceptually divided in two steps. At first, the external tectonic load drives a progressive quasi-static and stable slip localization on the fault. This phase may last many years as suggested by the models of Rice (1993). The duration depends on the local strain rate on the fault and of the complex frictional behavior of the fault at very low velocity, implying possible contact renewing. After, the fault loses its stability and the slip grows dynamically independently of the external load. This second phase called initiation is the natural transition to the crack propagation stage that generates the strong ground motions. This phenomenon has been observed at small scales in laboratory by Ohnaka & Shen (1999) when conducting locally monitored failure experiments. From another point of view Iio (1992) and Ellsworth & Beroza (1995) found evidence of dynamic nucleation phases in seismograms that may be related to an initiation process. The slow initial phase of seismograms has been recently re-observed and confirmed as source effects by Iio et al. (1999). In this work we propose to set up the bases of a mechanically consistent model of initiation: the growth of a slip instability on slip dependent fault models in 3D (three dimensions). The model of crust is composed of an infinite homogeneous elastic body. The fault is a flat interface subject to a scalar slip dependent friction law (see Figure 3.1). The law is scalar because we consider the case where the slip conserves the direction x on the fault plane, i.e. the rake is constant. Thus the friction law concerns only two variables: the slip u_x and the shear stress σ_{xz} . The law that we use is plotted on Figure 3.2. It is a kind of slip dependent cohesive force as the one proposed by Ida (1972). It is also an idealization of the slip dependent law found in earlier experiments done by Ohnaka et al. (1987).

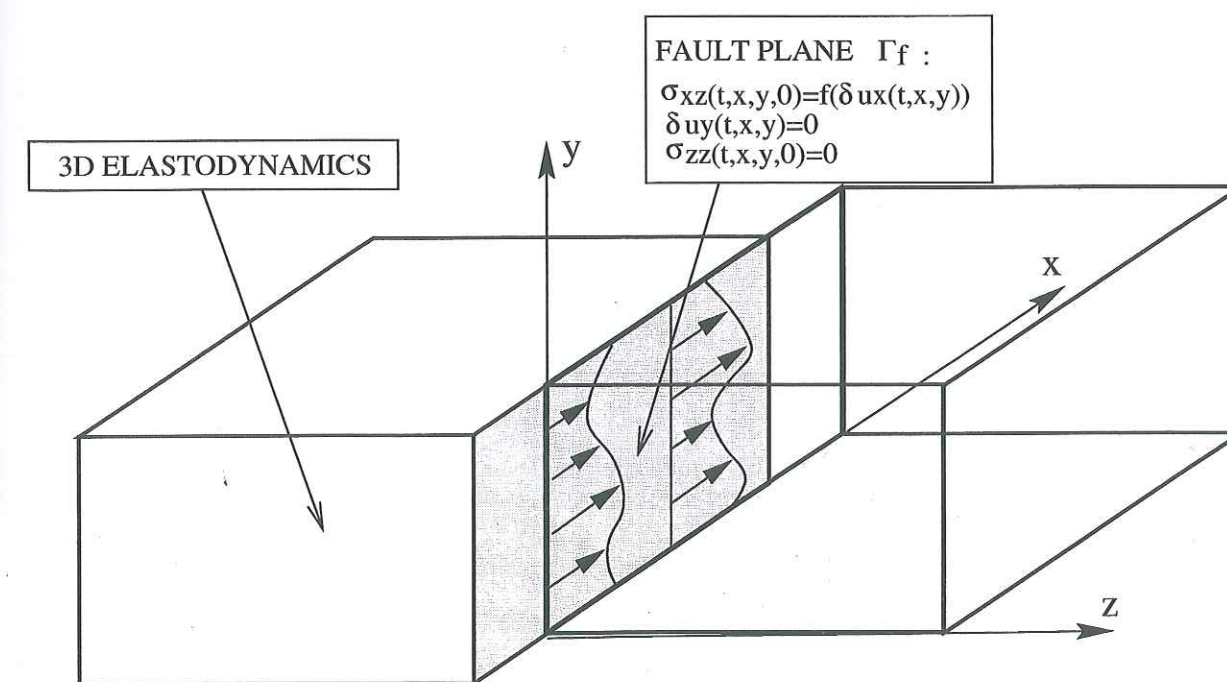


FIG. 3.1 – The 3D problem. Notations.

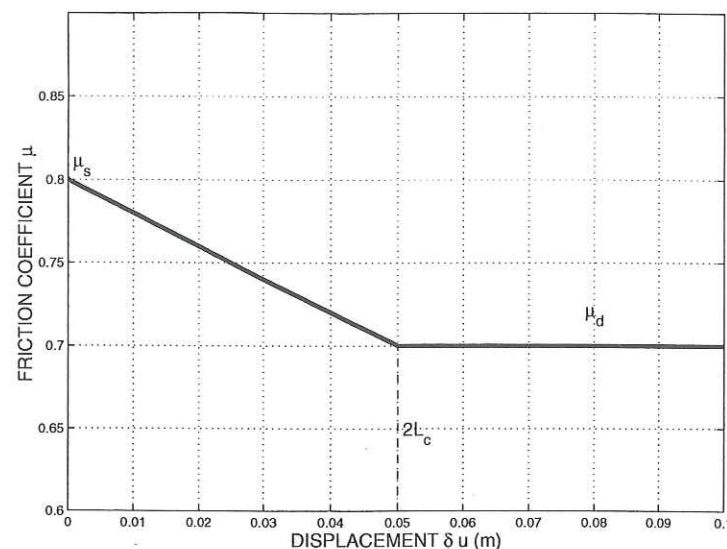


FIG. 3.2 – The slip dependent friction law. Three parameters σ_s (static friction), σ_d (dynamic friction) and L_c (critical slip) define the idealized slip dependent friction law.

To study the spontaneous evolution of this model, we put a perturbation in the system at an equilibrium position (the fault is at the rupture level) and we observe the growth of the slip on the fault. Using a finite difference method, we present on Figure 3.3 the different parts of the process on an infinite fault. The slip evolution can be divided in three successive parts: wave, initiation and crack. The wave part which is associated to the propagation of the perturbation on the fault is not of interest because its amplitude remains of the order of the perturbation. The crack part that begins when some points on the fault have overcome the critical slip L_c is another subject that we do not treat here since it has been studied by other authors: see Kostrov (1964) and Madariaga (1976) for earlier works on the self-similar circular crack. For various numerical studies see Virieux & Madariaga (1982) and Day (1982) for earlier works and see Madariaga et al. (1998) for recent studies. We focus on the initiation part that occurs when the points of the fault are either in the stable or the weakening part of the friction law. It is the non-stationary and non-radiative process that carries information on the instability before the radiative crack exists. We study the initiation process on a 3D homogeneous infinite fault by conducting analytical and numerical studies. For the corresponding 2D homogeneous infinite fault, one may refer to Campillo & Ionescu (1997) (anti-plane case) and to Favreau et al. (1999) (in-plane case). In the last section we introduce the concept of fault finiteness in 3D on a canonical example and we extract numerically the main features of the initiation process on 3D finite faults. For complementary informations on the finite fault initiation one may refer to the 2D anti-plane problem that was studied numerically by Ionescu & Campillo (1999) and analytically by Dascalu et al. (2000).

Problem statement. We consider the three dimensional shearing of two homogeneous half-spaces bounded by the plane Γ_f at $z = 0$ (Figure 3.1). The half-spaces are in contact on a planar surface with slip dependent friction. The elastic medium has the density ρ and the two wave velocities v_p for P waves and v_s for S waves. The corresponding first Lamé coefficient is $\rho(v_p^2 - 2v_s^2)$ and the second one (the shear modulus) is ρv_s^2 . By $\Phi(t, x, y, z)$ and $(\Psi_i(t, x, y, z), i = x, y, z)$, we denote the Helmholtz potentials (corresponding to P and S waves). The displacement $(u_i(x, y, z, t), i = x, y, z)$ and the stress fields acting on the

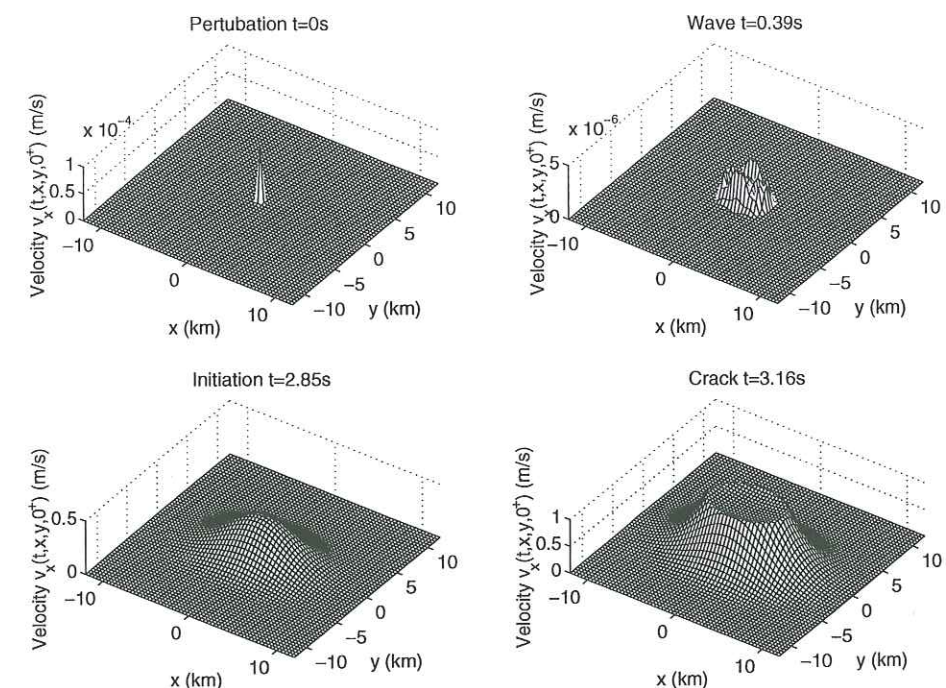


FIG. 3.3 – The process of initiation for an infinite fault. Numerical Values are $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333 \text{ m s}^{-1}$, $\eta = v_p/v_s = \sqrt{3}$, $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$, $L_c = 0.18 \text{ m}$.

fault $(\sigma_{iz}(x, y, z, t), i = x, y, z)$ can be derived from the potentials as follows:

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{\rho v_s^2} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial z^2} + \frac{\sigma_{xx}^\infty}{\rho v_s^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho v_s^2} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial z^2} + \frac{\sigma_{yy}^\infty}{\rho v_s^2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{\rho v_s^2} = (\eta^2 - 2) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial y \partial z} \right) + \frac{\sigma_{zz}^\infty}{\rho v_s^2} \quad (3.6)$$

where $(\sigma_{iz}^\infty, i = x, y, z)$ is the homogeneous static initial stress field acting on the fault and $\eta = v_p/v_s$ the ratio of P wave to S wave velocities. We do not explicit the other stress components because they are not concerned by our boundary conditions. In an homogeneous infinite bulk, the equations of elastodynamics can be written

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = v_p^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} = v_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} \right), i = x, y, z \quad (3.8)$$

which are two separate wave equations. In order to have a unique potential $(\Psi_i, i = x, y, z)$, we add the classical Helmholtz condition

$$\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = 0 \quad (3.9)$$

We assume that the problem has some fundamental symmetries: in one hand, $\Phi(t, x, y, -z) = -\Phi(t, x, y, z)$ and $\Psi_z(t, x, y, -z) = -\Psi_z(t, x, y, z)$ and in the other hand, $\Psi_x(t, x, y, -z) = \Psi_x(t, x, y, z)$ and $\Psi_y(t, x, y, -z) = \Psi_y(t, x, y, z)$. From these symmetries we deduce the other useful symmetries $u_x(t, x, y, -z) = -u_x(t, x, y, z)$, $u_y(t, x, y, -z) = -u_y(t, x, y, z)$, $u_z(t, x, y, -z) = u_z(t, x, y, z)$, $\sigma_{xz}(t, x, y, -z) = \sigma_{xz}(t, x, y, z)$, $\sigma_{yz}(t, x, y, -z) = \sigma_{yz}(t, x, y, z)$ and $\sigma_{zz}(t, x, y, -z) + \sigma_{zz}(t, x, y, z) = 2\sigma_{zz}^\infty$.

The condition of continuity of the stress vector on the fault plane Γ_f gives

$$\sigma_{zz}(t, x, y, 0^+) = \sigma_{zz}(t, x, y, 0^-) = \sigma_{zz}^\infty \quad (3.10)$$

$$\sigma_{xz}(t, x, y, 0^-) = \sigma_{xz}(t, x, y, 0^+) = \sigma_{xz}(t, x, y, 0) \quad (3.11)$$

$$\sigma_{yz}(t, x, y, 0^-) = \sigma_{yz}(t, x, y, 0^+) = \sigma_{yz}(t, x, y, 0) \quad (3.12)$$

We remark in equation (3.10) that the normal stress does not present any variation during the slip. The condition of symmetry of the normal displacement $u_z(t, x, y, -z) = u_z(t, x, y, z)$ already gives its continuity i.e. the fault will not open during the slip.

Here we assume that the displacement is scalar on the fault i.e. we choose the direction y with a null velocity on the fault. For this we simply write

$$u_y(t, x, y, 0^+) = u_y(t, x, y, 0^-) = 0 \quad (3.13)$$

The frictional slip dependent boundary condition on the fault plane Γ_f reads on the x component of the fault displacement and we put

$$\sigma_{xz}(t, x, y, 0) = -\sigma_{zz}^\infty \mu(x, y, \delta u_x(t, x, y)) \text{sign}(\delta v_x(t, x, y)) \quad \text{if } \delta v_x(t, x, y) \neq 0 \quad (3.14)$$

$$|\sigma_{xz}(t, x, y, 0)| \leq -\sigma_{zz}^\infty \mu(x, y, \delta u_x(t, x, y)) \quad \text{if } \delta v_x(t, x, y) = 0 \quad (3.15)$$

where $\delta u_x(t, x, y) = u_x(t, x, y, 0^+) - u_x(t, x, y, 0^-)$ and $\delta v_x(t, x, y) = \dot{u}_x(t, x, y, 0^+) - \dot{u}_x(t, x, y, 0^-)$ are the relative slip and the relative slip rate on the fault, and $\mu(x, y, \delta u_x)$ is the slip dependent friction coefficient. We consider in this paper only the case of a friction law with a piecewise linear dependence on the slip, (Figure 3.2) i.e.

$$\mu(x, y, \delta u_x) = \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{2L_c} \delta u_x \quad \text{if } \delta u \leq 2L_c, \quad (3.16)$$

$$\mu(x, y, \delta u_x) = \mu_d \quad \text{if } \delta u_x > 2L_c. \quad (3.17)$$

In every case in this study, the system is put on an unstable equilibrium position and the evolution is triggered by a small perturbation of the velocity field. This small perturbation is our initial condition and it verifies the symmetries. We denote it by:

$$u_i^0(x, y, z) = u_i(0, x, y, z) \quad (3.18)$$

$$v_i^0(x, y, z) = v_i(0, x, y, z) \quad (3.19)$$

The system is now completely defined and the symmetry implies that we can work on the half space ($z \geq 0$). Also $\delta u_x(t, x, y) = 2u_x(t, x, y, 0^+)$ and $\delta v_x(t, x, y) = 2v_x(t, x, y, 0^+)$.

Eigenvalue analysis and dominant part of the homogeneous infinite fault. In this section our aim is to extract the spectral properties of the initiation process on an infinite fault in 3D. The method is derived from the one that we used previously in the corresponding 2D in-plane problem (see Favreau et al. (1999)). To perform the spectral analysis we need two new hypothesis. First $\delta u_x(t, x, y) \leq 2L_c$ and second the initial static stress is assumed to correspond to the static friction level everywhere on the fault plane at

$t = 0$ i.e. $\sigma_{xz}^\infty = -\sigma_{zz}^\infty \mu_s$. Consequently we can write the frictional condition in a linearized form everywhere on the fault:

$$\frac{\sigma_{xz}(t, x, y, 0)}{\rho v_s^2} = -\alpha_c u_x(t, x, y, 0) \quad (3.20)$$

where

$$\alpha_c = -\sigma_{zz}^\infty \frac{\mu_s - \mu_d}{\rho v_s^2 L_c} = \frac{\sigma_s - \sigma_d}{\rho v_s^2 L_c} \quad (3.21)$$

where σ_s and σ_d denote respectively the common static and dynamic frictions.

Since the problem is linearized, we can give a spectral representation in time of the solution on a base of eigenfunctions $(\Phi^\lambda(x, y, z), \Psi_i^\lambda(x, y, z), i = x, y, z)$ verifying the eigenvalue problem summarized in appendix A. Classically, to extract the growing part of the solution (the dominant part), one has to find the eigenvalues whose real part is positive ($Re(\lambda) > 0$). Since the friction law is slip dependent and do not contain any time scale, all eigenvalues have a real square (see Favreau et al. (1999)). Consequently we have to search the real eigenvalues ($\lambda \in \mathbb{R}$) to build the dominant part. In appendix A we show that such eigenfunctions can be found in the set

$$\Phi^\lambda(x, y, z) = e^{ik_x x + ik_y y - p z} \quad (3.22)$$

$$\Psi_i^\lambda(x, y, z) = S_i e^{ik_x x + ik_y y - s z}, i = x, y, z \quad (3.23)$$

$$s \in \mathbb{R}^+, s > \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.24)$$

$$p \in \mathbb{R}^+, p = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)(k_x^2 + k_y^2) + s^2} \quad (3.25)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda = \pm v_s \sqrt{s^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (3.26)$$

where $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$.

In appendix A we find the values of the amplitudes S_i and a condition on the wave-numbers k_x and k_y to verify (3.24) which is the condition to find $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{k_x^2}{k_{xc} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} + \frac{k_y^2}{k_{yc} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} < 1, k_{xc} = \frac{\alpha_c}{\gamma}, k_{yc} = \alpha_c, \gamma = 2(1 - 1/\eta^2) \quad (3.27)$$

k_{xc} and k_{yc} are the spectral cut-off of the 2D in-plane and anti-plane problems. By D_s we denote the spectral domain defined by (3.27). Once D_s is known, it is possible to solve numerically $s(k_x, k_y)$. Therefore we deduce the functions $p(k_x, k_y)$ from (3.25) and $\lambda(k_x, k_y)$ from (3.26). In the further sections, we will sometimes write shortly s , p and λ but these functions are considered as known functions of the wave numbers k_x and k_y . On Figure 3.4 (top) we represent the functions $p(k_x, k_y)$ and $s(k_x, k_y)$ on D_s for $(k_x > 0, k_y > 0)$. The function $\lambda(k_x, k_y)$ is also plotted on Figure 3.4 (bottom). We verify that $s(0, 0) = \alpha_c$, $p(0, 0) = \alpha_c/\eta$ and $\lambda(0, 0) = v_s \alpha_c$. We verify also that on the boundary of D_s we have $s(\text{boundary}) = p(\text{boundary}) = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ and $\lambda(\text{boundary}) = 0$. For the body, numerical values are $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333 \text{ m s}^{-1}$ and $\eta = v_p/v_s = \sqrt{3}$. For the friction law numerical values are $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$ and $L_c = 0.18 \text{ m}$. Therefore $\alpha_c = 0.0017 \text{ m}^{-1}$.

A general representation of the dominant part can be constructed on the base of the eigenfunctions corresponding to real eigenvalues λ . The solution for the dominant part of the displacement field is written

$$u_i^d(t, x, y, z) = \iint_{D_s} u_i^{k_x, k_y}(z) e^{i(k_x x + k_y y)} \left(W_0(k_x, k_y) \cosh(\lambda t) + \frac{W_1(k_x, k_y)}{\lambda} \sinh(\lambda t) \right) dk_x dk_y \quad (3.28)$$

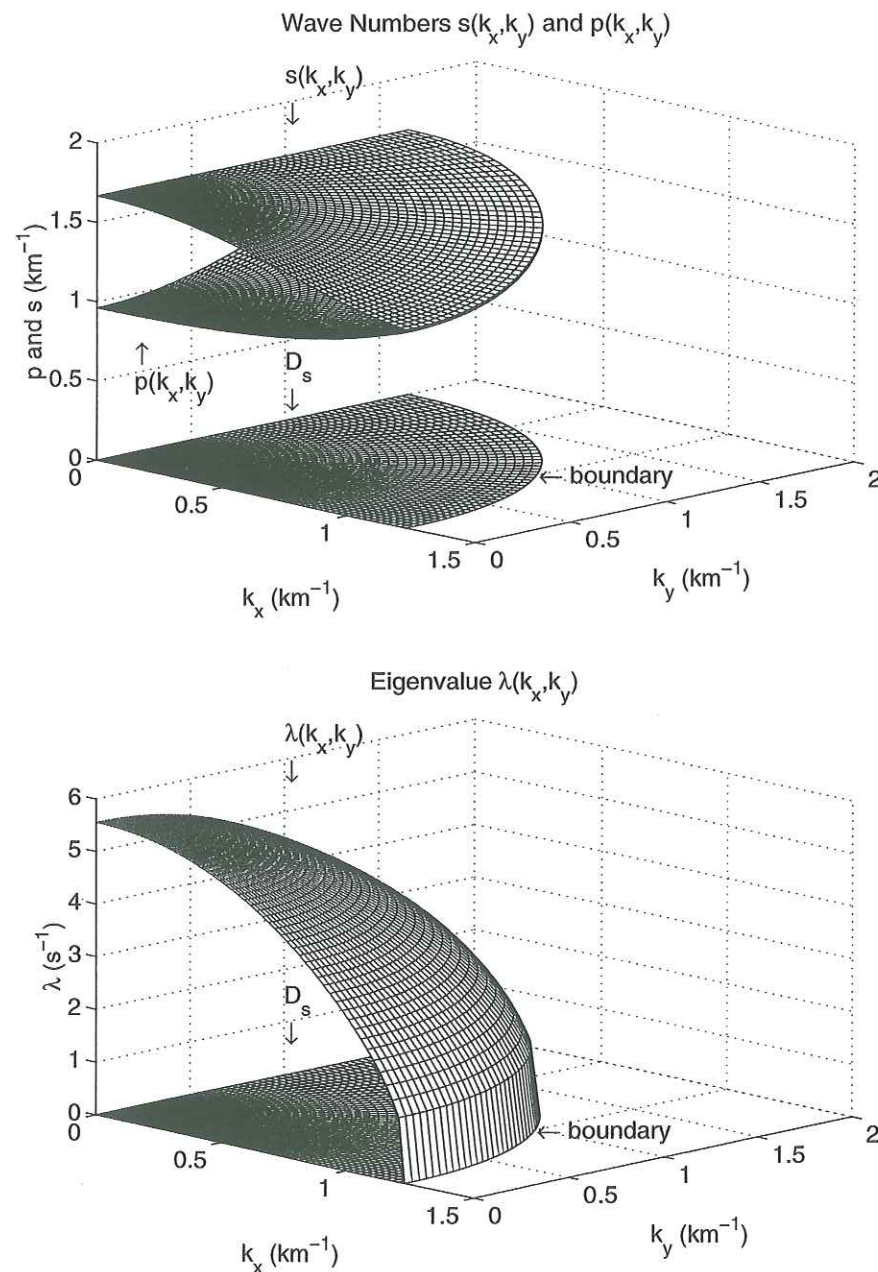


FIG. 3.4 – *Eigenvalue Analysis. Numerical Values are $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333 \text{ m s}^{-1}$, $\eta = v_p/v_s = \sqrt{3}$, $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$, $L_c = 0.18 \text{ m}$.*

where functions $u_i^{k_x, k_y}(z)$ are derived from the z -dependence of the eigenfunctions (see appendix B). The weights $W_0(k_x, k_y)$ in formula (3.28) are calculated from the x - y -Fourier transform of the initial conditions in displacement $\tilde{u}_i^0(k_x, k_y, z)$ as (see appendix B):

$$W_0(k_x, k_y) = \frac{1}{N(k_x, k_y)} \int_0^{+\infty} \sum_{i=x,y,z} \left((u_i^{k_x, k_y})^*(z) \tilde{u}_i^0(k_x, k_y, z) \right) dz \quad (3.29)$$

where $N(k_x, k_y)$ is the norm of the eigenfunctions calculated in appendix B. The coefficients $W_i^1(k_x, k_y)$ are calculated in the same way by taking the x - y -Fourier transform of the initial conditions in velocity $\tilde{v}_i^0(k_x, k_y, z)$.

To compare the solution (3.28) with a finite difference simulation, we take a narrow Gaussian perturbation of half width a i.e. $v_x^0(x, y, z) = v_0 e^{-(x^2+y^2+z^2)/a^2}$. In appendix C we give the analytical expression of $W_1(k_x, k_y)$ for this form of perturbation. On Figure 3.5 we test the accuracy of our analysis. We plot the complete solution computed in finite difference and the analytical dominant part on the fault. The grid of the finite difference is $480 \times 480 \times 240$. The analytical dominant part is a very good approximation of the initiation process. The shape of the slip is completely respected.

The slip is governed by the dominant part which is a solution built on a continuous and bounded spectral domain D_s . The spectral cut-off governs the pattern of the spatial slip distribution due to a concentrated perturbation. The existence of this specific pattern suggests to introduce a natural concept of slipping patch P_c . The following definition is more physical than mathematical but it is simple and natural: for each direction θ in the spectral domain we have a spectral cut-off at the critical radius $k_c(\theta) = \frac{\alpha_c}{\gamma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$. To this critical radius in the spectral domain we associate a corresponding critical length $l_c(\theta) = \frac{\pi}{k_c(\theta)} = \frac{\pi}{\alpha_c} (\gamma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$. From this parametric length we deduce an associated slipping patch P_c by the contour inequality

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3 \leq \frac{l_{xc}}{2} x^2 + \frac{l_{yc}}{2} y^2, \quad l_{xc} = \frac{\pi \gamma}{\alpha_c}, \quad l_{yc} = \frac{\pi}{\alpha_c} \quad (3.30)$$

On Figure 3.6 we plot the map of the complete slip velocity on the fault calculated with finite differences at the beginning of the process. The white line represents the contour of the theoretical slipping patch P_c . Let us describe the propagation of the perturbation. One must take care that this propagation is coupled with the friction law and that it can not be directly interpreted like in the context of free surface. At the beginning ($t < 0.2 \text{ s}$), we see a pulse whose ellipsoidal form is mainly due to the ratio of the P wave to the S wave velocities. When the perturbation reaches P_c ($t \approx 0.3 \text{ s}$), we begin to see a stable non-propagative patch. After we see that this patch grows inside another propagative phase ($t = 0.5 \text{ s}$) related to a sub-shear phase in the x direction. At this stage the non-propagative patch is well contained in P_c . For $t > 0.6 \text{ s}$, the propagative phases become less visible and the non-propagative patch dominates. After this the size of P_c has no clear signification but its form ratio gives the form ratio of the slip related to the initiation process. We can say that P_c corresponds qualitatively to the contour of the zone where the non-propagative unstable slip occurs. One must understand that P_c can not represent a precise contour of the slip distribution. It is the characteristic area on which the instability can grow. Through its definition we speculate that P_c is an optimized area in the sense that it is one of the smallest that we can find (may be the smallest).

After a certain time, the slip at the center of the perturbation is governed by the most dominant eigenfunction i.e. the one for $k_x = k_y = 0$ (see appendix B). This most dominant eigenfunction is $u_x^{0,0}(z) = \alpha_c^3 e^{-\alpha_c z}$ and $u_y^{0,0}(z) = u_z^{0,0}(z) = 0$. Consequently

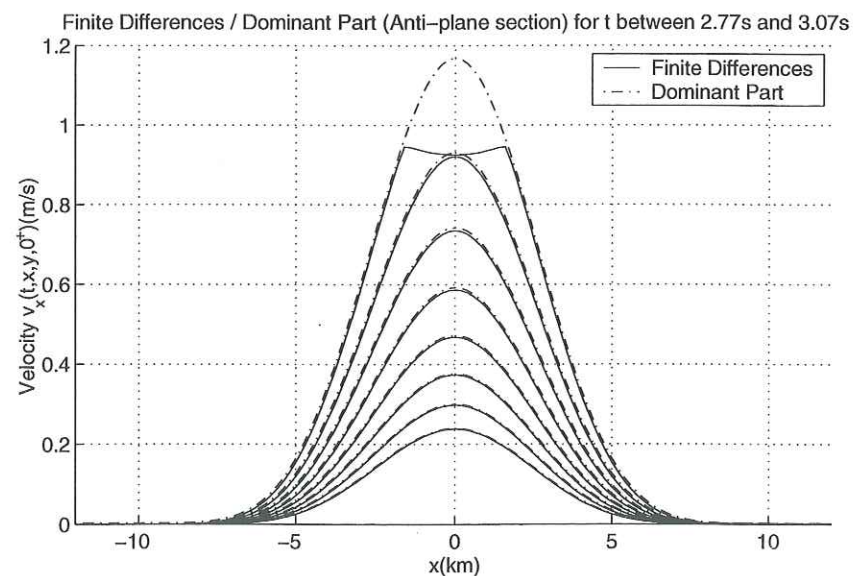
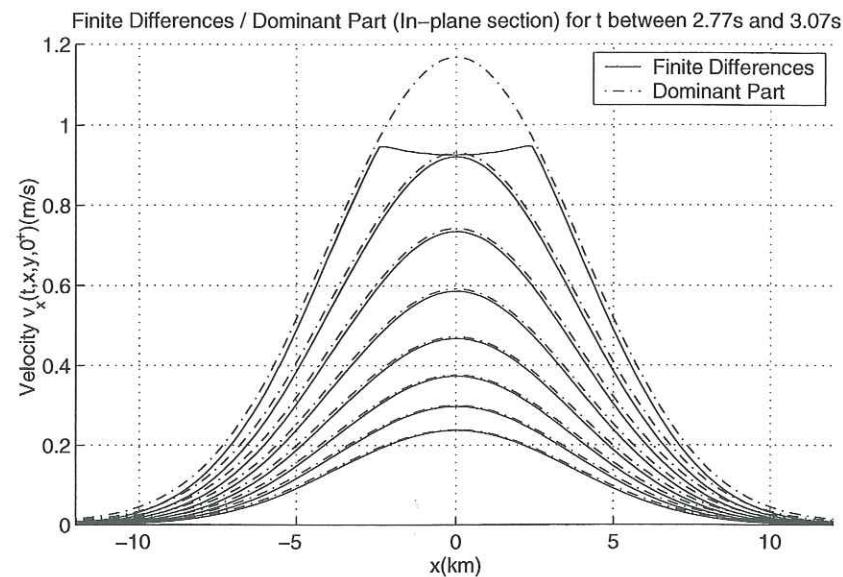


FIG. 3.5 – Numerical test of the dominant part. Numerical Values are $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333 \text{ m s}^{-1}$, $\eta = v_p/v_s = \sqrt{3}$, $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$, $L_c = 0.18 \text{ m}$.

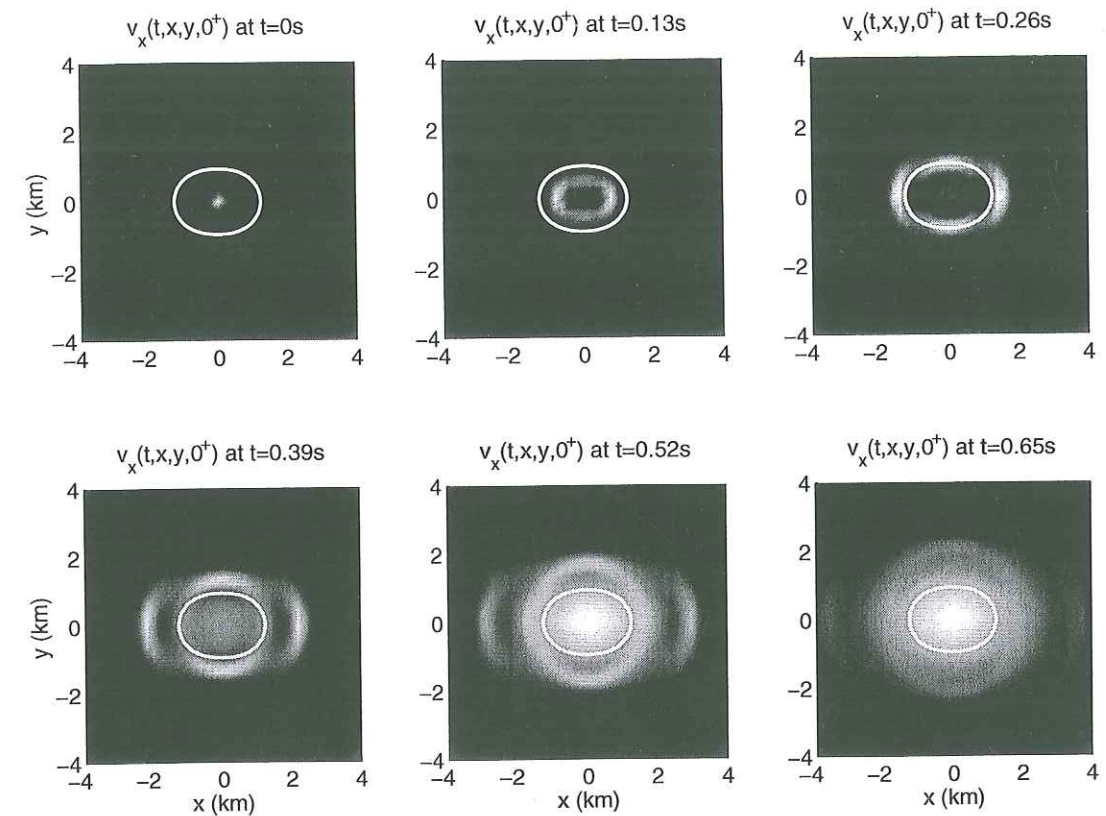


FIG. 3.6 – The definition of the slipping patch P_c . Numerical Values are $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333 \text{ m s}^{-1}$, $\eta = v_p/v_s = \sqrt{3}$, $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$, $L_c = 0.18 \text{ m}$.

the slip vanishes from the fault approximately like $e^{-\alpha_c z}$. This feature has been verified in the finite difference computation. Also, since the most dominant eigenfunction has the eigenvalue $\lambda(0,0) = v_s \alpha_c$, the slip velocity grows in time approximately like $e^{v_s \alpha_c t}$. Therefore we can give a theoretical approximation of the time of initiation T_c to reach the critical slip L_c at the center of the perturbation. For a narrow perturbation of half width a and under the conditions $a \ll \pi/\alpha_c$ and $T_c \gg 1/(\alpha_c v_s)$ we obtain (see appendix C):

$$T_c = \frac{1}{\alpha_c v_s} \ln \left(\frac{L_c}{\frac{\pi \alpha_c^5 (\gamma+1)}{12 \gamma^{3/2}} \left(W_0(0,0) + \frac{W_1(0,0)}{v_s \alpha_c} \right)} \right) \quad (3.31)$$

The value of the time of initiation found by (3.31) in appendix C is 2.81sec instead of 3.0sec in the finite difference computation. The approximation in (3.31) supposes that the slip evolves like $e^{v_s \alpha_c t}$ but it is not true at the beginning of the process (all modes participate), which explains the small difference.

Introduction to the initiation of finite fault in 3D The time of initiation of an infinite fault depends essentially on the maximal eigenvalue $\lambda = v_s \alpha_c$ and the corresponding numerical value is small (few seconds), assuming reasonable physical parameters. As we know from Ionescu & Campillo (1999) and Dascalu et al. (2000), the time of initiation can be much longer for finite faults and it depends on the size of the fault. For more details on 2D problem one may also refer to appendix D. Since a complete set up and an exhaustive analytical study of the finiteness effect in 3D are not possible for the moment, we limit our purpose to the analysis of the main features exhibited by a canonical example.

The finite fault is defined by a homogeneous slip-weakening zone bounded by a barrier of infinite strength (the slip is null outside the fault). For the finite fault form

we choose a canonical case where the fault is self-similar to the slipping patch P_c defined in the previous section. This particular choice seems to be interesting a priori because it corresponds to the case where the finiteness effects operates equally in every direction of the fault plane. By ζ we denote the factor of self-similarity (ratio of length). For $\zeta = 1$ the finite fault is identical to the slipping patch P_c and for $\zeta = +\infty$ the fault is infinite. We denote by C3DFF this self-similar fault family parameterized by ζ . To begin we do a numerical experiment in which we show the influence of the fault size on the stability. We trigger the fault with the same small perturbation in two closed cases. Let us present the results on Figure 3.7. We plot the velocity on the fault for two different but closed slipping patches P_c (P_c is the black solid line). The first fault (top) is unstable because the slip grows after the perturbation. In this case the fault is slightly larger than the slipping patch P_c , indeed $\zeta = 1.23$. The second fault (bottom) is stable and the perturbation vanishes. In this case the fault is slightly larger than the slipping patch P_c again but $\zeta = 1.16$. This shows that the C3DFF admits a point of transition ζ_0 that delimits the stable and the unstable regimes. To approach this point of transition we did a series of finite difference experiments for a wide range of ζ . Finally we approached the critical point by dichotomy. The precise calculation of this point is difficult with this method but we can give $\zeta_0 \approx 1.2 \pm 0.05$. Another method must be tried for a more precise calculation. Let us remark shortly that for both anti-plane and in-plane problems we found theoretically and numerically $\zeta_0 = 0.7370\dots$. The reason for the difference between 2D and C3DFF can be justified. Indeed for the C3DFF the slip is organized in another more complex way and elastic forces acting on the fault are stronger than in 2D. This stabilizes the slip for larger faults. As it has been noted, for the C3DFF, the fault needs to be larger than the slipping patch to be unstable (i.e. $\zeta_0 > 1$ "in 3D") whereas it does not need in 2D (i.e. $\zeta_0 < 1$ "in 2D").

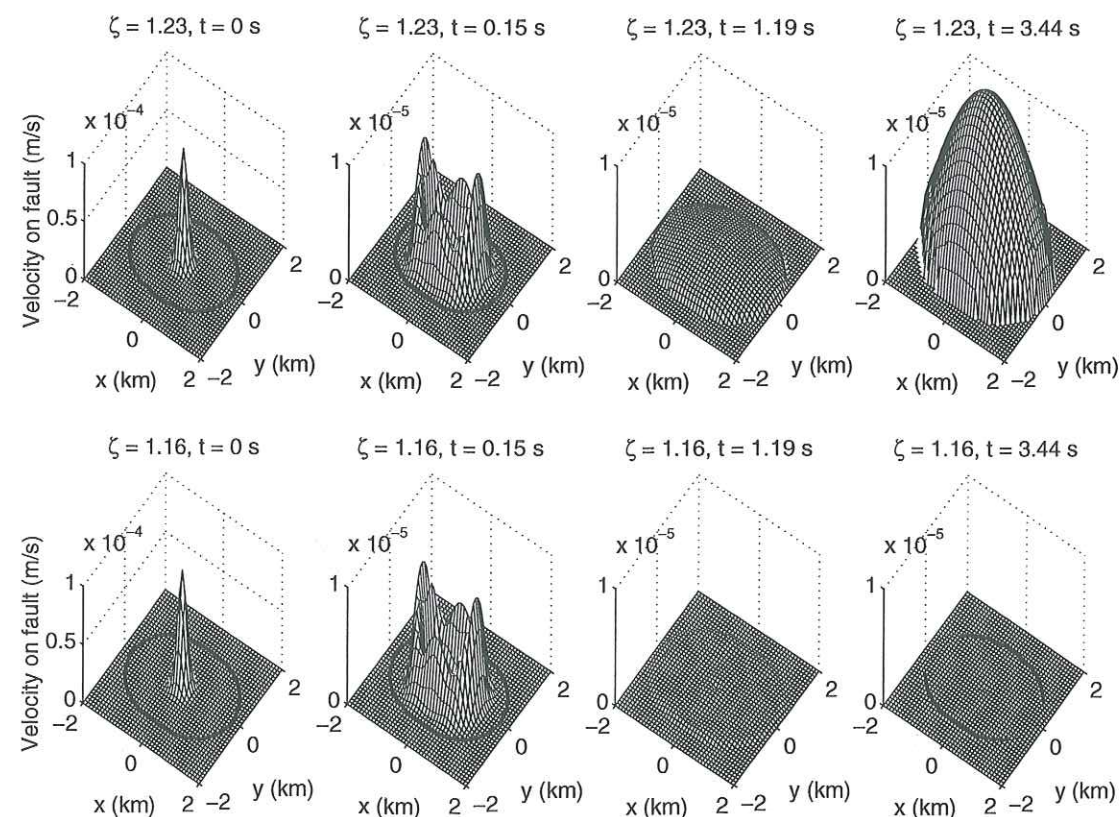


FIG. 3.7 – The numerical detection of the critical point of the C3DFF.

In the following we consider cases where the fault is unstable i.e. when $\zeta > \zeta_0$. We concentrate on the characterization of the rate of instability of the fault. To give a sense to this rate of instability, we must assume some spectral properties for the finite fault. As we know from anti-plane studies (see Dascalu et al. (2000)), the initiation process can be described by a dominant part that corresponds to the part of the spectrum with eigenvalues of positive square ($\lambda^2 > 0$). Unlike the infinite fault, the spectrum of the finite fault is discrete and consequently the one of the dominant part is discrete. By λ_0 we denote the largest eigenvalue of the spectrum of the dominant part. We shall now assume that the spectrum is also discrete for a 3D finite fault. For information, the formulation of the spectral problem for a finite fault would be similar to the one in appendix A excepted that the boundary condition (3.38) would work only for the points inside the fault domain and that the slip is null outside.

We concentrate on the spectrum rather than on the time of initiation because the spectrum is a characteristic of the fault evolution independently of the perturbation used to trigger it. More precisely we study numerically the exponent that governs the slip growth on the C3DFF. This exponent is assumed to be very closed to the largest eigenvalue of the C3DFF. The procedure is the following: we run numerical experiments and we vary the dimension of P_c through the critical slip L_c . For each simulation we plot an estimation of the dimensionless first eigenvalue $\lambda_0/(v_s \alpha_c)$. Presented in a dimensionless form, the parameter $\lambda_0(\zeta)/(v_s \alpha_c)$ is related to the inverse of the number of fault lengths on which a wave would have propagated during the unstable process of initiation. We estimate $\lambda_0/(v_s \alpha_c)$ by evaluating the quantity

$$\frac{1}{v_s \alpha_c} \frac{\partial \ln(v_x(t, x, y, 0^+))}{\partial t} \quad (3.32)$$

On Figure 3.8 we observe that the quantity (3.32) remains constant in time and space when the instability has developed enough. This suggests strongly that the slip is governed by a single mode during the process of initiation. Indeed it has been established by Dascalu et al. (2000) that the positive eigenvalue are discrete for a 2D anti-plane finite fault and that the largest one λ_0 gives the evolution of the slip i.e. it grows like $e^{\lambda_0 t}$. Here we assume that this analysis is still valid in 3D and that the numerical computation gives a good estimation of $\lambda_0/(v_s \alpha_c)$ (assuming its existence in 3D).

On Figure 3.9 we plot $\lambda_0/(v_s \alpha_c)$ for a wide range of C3DFF by varying ζ . In practice the calculation in finite differences is difficult for $\lambda_0/(v_s \alpha_c) < 0.1$ because small values of the eigenvalue implies long duration of initiation that are hardly reproduced numerically. Nevertheless we can explore the finiteness effect. We have a vertical slope around $\zeta = \zeta_0$. Consequently the sensitivity of the rate of instability to the scaling parameter ζ can be considered as strong near the critical point $\zeta = \zeta_0$ and we can remark that a small evolution of the parameters of the fault has important consequences on its rate of instability. The curve $\lambda_0(\zeta)/(v_s \alpha_c)$ plotted on Figure 3.9 is a simple representation of the effect of the geometry (in fact the confinement of the weakening zone) on the rate of instability. Physically we can associate ζ with the size or with the weakening of a pre-slip zone. If one considers that ζ varies continuously and slowly in time around ζ_0 , λ_0 will vary suddenly from 0 to a significant value, leading the system to a rapid evolution.

We now want to show that this feature is conserved at least in another case. We can note that this vertical slope has been deduced analytically in anti-plane by Dascalu et al. (2000). One can also refer to the Figure 3.12 of appendix D for a synthetic view in 2D. In 3D we propose to look at another main change of geometry which is the uniform stretching of the fault form in one direction (or the change of ellipticity of the fault). For this purpose we estimate $\lambda_0/(v_s \alpha_c)$ of different faults close to their critical point of

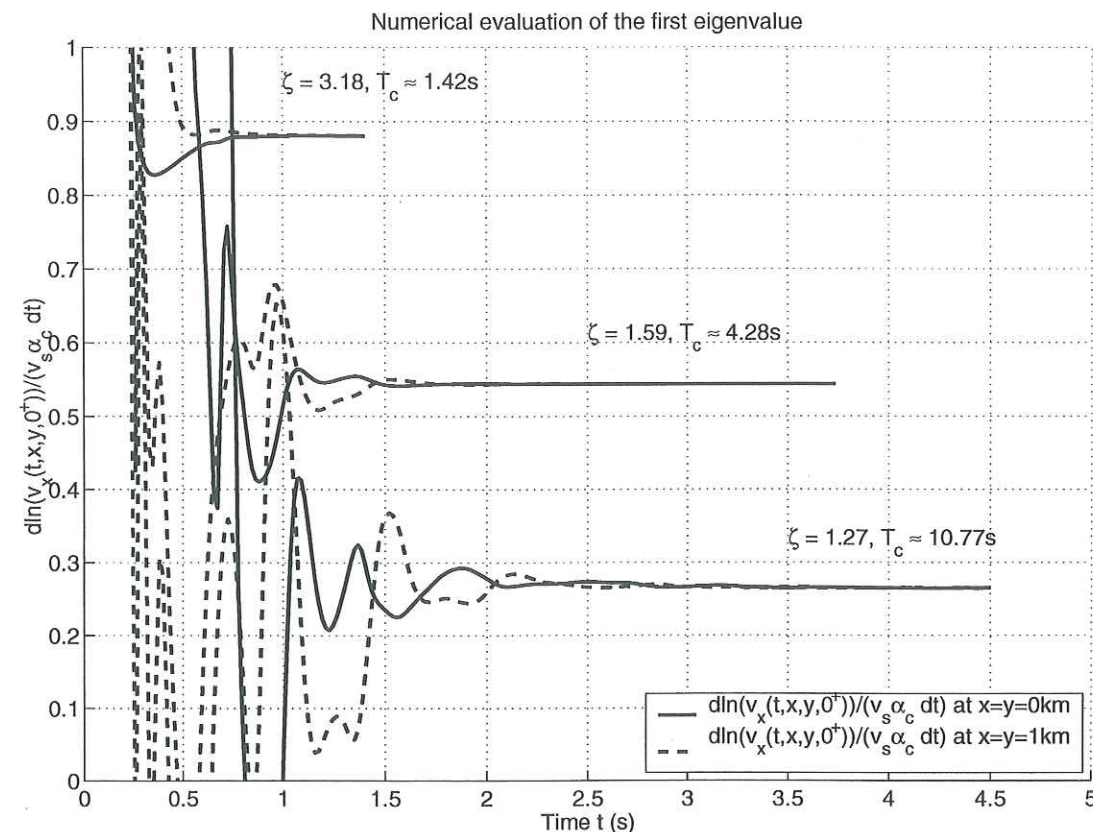


FIG. 3.8 – The numerical measure of the exponent (or first eigenvalue) for self-similar C3DFF.

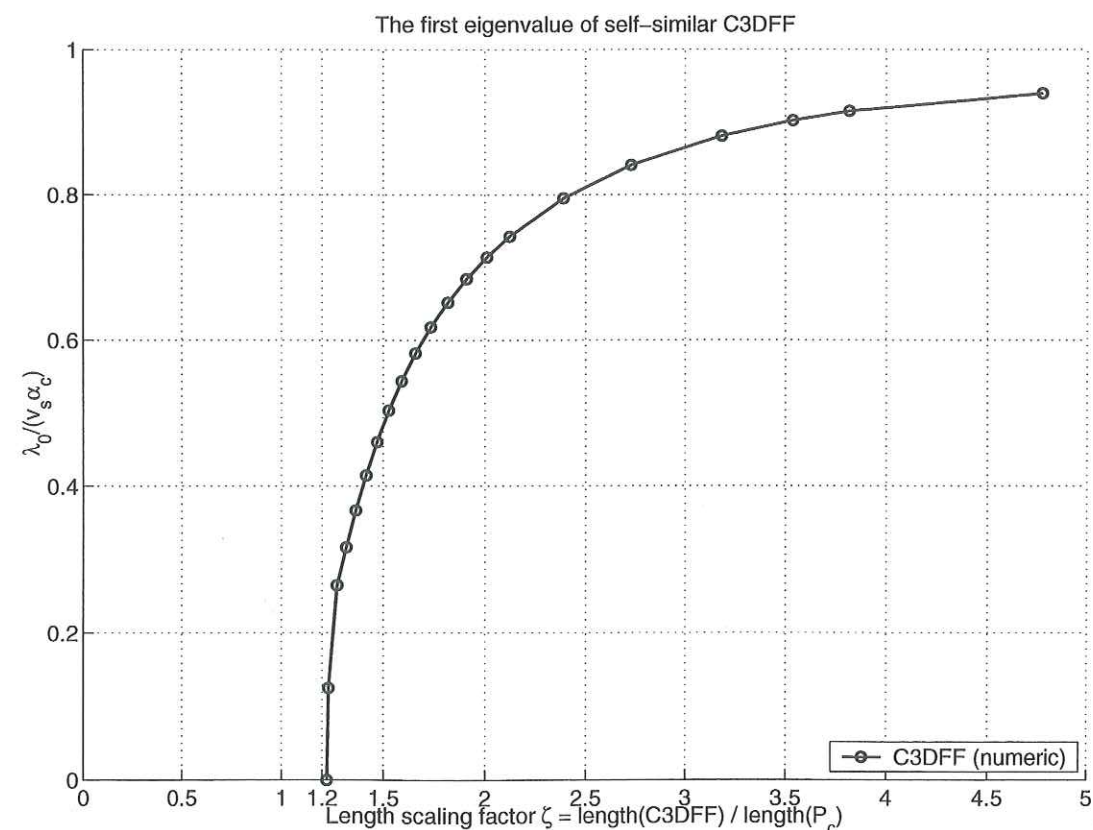


FIG. 3.9 – The exponent (or first eigenvalue) for self-similar C3DFF as a function of the length scaling factor ζ .

instability. We consider three fault families: (1) the critical C3DFF stretched in in-plane direction, (2) the critical C3DFF stretched in anti-plane direction and (3) the critical C3DFF stretched self-similarly.

To compare them, we plot their estimated first eigenvalue as a function of their increasing surface ratio χ . For (1) and (2) we do new sets of computations and for (3) we simply plot $\lambda_0(\chi)/(v_s\alpha_c)$ of the self-similar C3DFF by taking the new abscissa $\chi = (\zeta/\zeta_0)^2$. When $\chi = 1$, all faults are critical. Here we must note that the change of abscissa ζ into abscissa χ does not affect the type of the slope (vertical or not) at the critical point.

On Figure 3.10 we plot the estimated first eigenvalue for the three types of geometric transformation, as a function of χ . First point, let us remark that C3DFF faults stretched in anti-plane or in-plane direction have the same first eigenvalue, which means that the C3DFF is an interesting case able to resolve the complexity induced by the presence of the two phase velocities of P and S waves. In another words, the C3DFF behaves like in an acoustic problem. Second point, they have a particular asymptote (around 0.7) that corresponds logically to the exponent of an unstable 2D finite fault at $\zeta = 1.2$. (see Figure 3.12 of appendix D). Even trivial, this feature is interesting. It means that a 3D fault zone can keep a lower exponent than $v_s\alpha_c$, assuming that it evolves to a 2D fault geometry. Such faults remain weakly unstable. They may be encountered in stratified bodies for example. If we think in terms of pre-slip zone evolution, we can say that such evolution is more favorable for long times of initiation. Inversely all curves seem to exhibit a vertical slope at $\chi = 1$ like for 2D faults (see appendix D). We can not verify it theoretically for the moment but this is an important fact. The model tends to predict a rapid evolution again. This feature seems to be relatively common, at least in some very different cases. Let us remark that some models do not predict this sharp transition. Indeed, in our model the time scale of the initiation process is given by the complete elastodynamic interaction of the body combined with the slip weakening behavior of the interface. A modification of either the behavior of the body or the behavior of the interface can lead to a very different qualitative behavior concerning the duration of the initiation. For example, the introduction of time scales like viscosity in the friction law can be preponderant at the critical point and can smooth the transition. In the same way simplifications of the elastodynamics like the quasi-dynamic approximation smooth the transition. To conclude on this, the type of transition at the critical point is an important question since the duration of the initiation and the time to detect the associated deformation depends on this transition.

Conclusion We define a three dimensional model of unstable dynamic initiation. The crust is modeled by an elastodynamic body and the fault is modeled by a flat interface subject to a slip weakening friction law. We set up in detail the characteristics of the infinite initiation process. We make a spectral analysis. We determine the eigenvalue of positive square and we find an expression for the dominant part. We give a definition of the slipping patch P_c i.e. the qualitative contour of the unstable slip triggered by a small perturbation. We also give an expression for the time of initiation. This time depends essentially on the largest eigenvalue $v_s\alpha_c$. After we introduce some models of initiation on finite faults in order to extract qualitatively the important features of the finiteness effect. To this we define a family of finite faults (C3DFF) self-similar to the slipping patch. We parameterize them by the factor of self-similarity ζ (length scaling factor). We identify the critical point $\zeta_0 \approx 1.2 \pm 5\%$ that separates the stable and unstable faults. It appears that in 3D, a fault must be slightly larger than the slipping patch to become unstable. In the domain of instability we quantify the rate of instability of the finite faults as a function of the scaling ζ . The rate of instability is given by a numerical estimation of the dimensionless first eigenvalue of the system $\lambda_0(\zeta)/(v_s\alpha_c)$ (this first eigenvalue is assumed

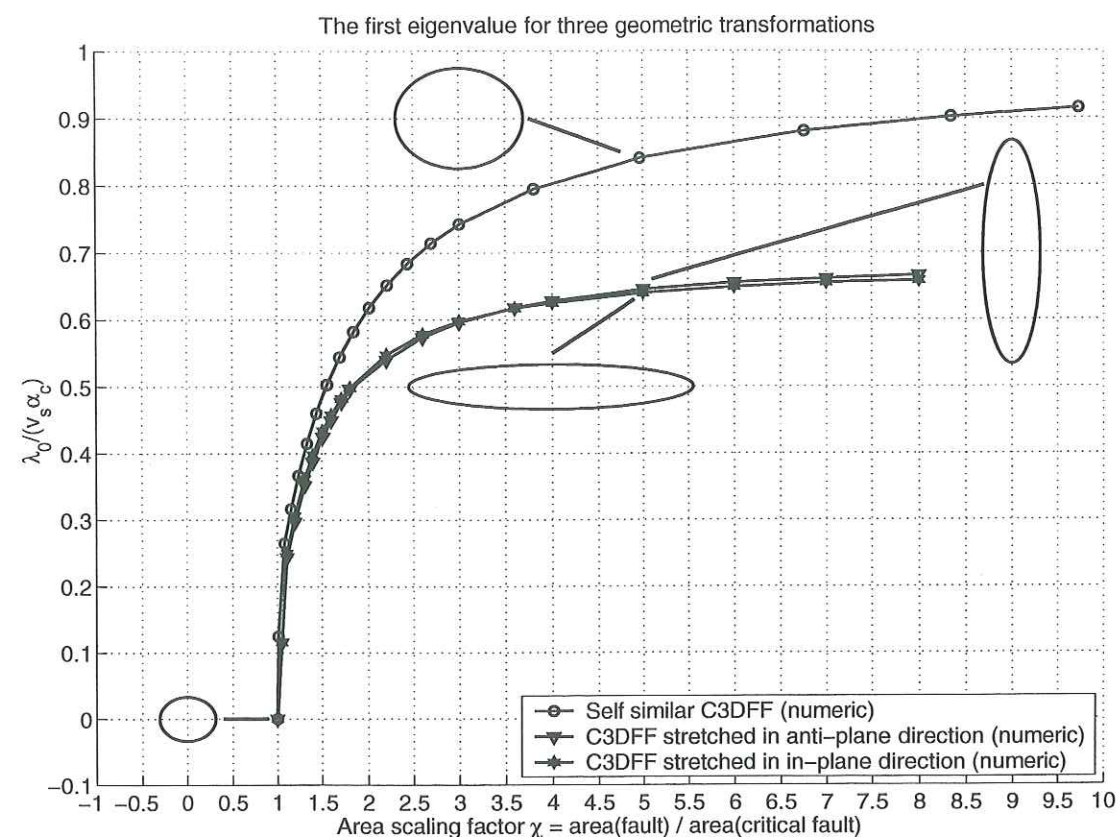


FIG. 3.10 – The exponent (or first eigenvalue) for three different types of geometric transformations of the C3DFF as a function of the area scaling factor χ .

to exist theoretically). The function $\lambda_0(\zeta)/(v_s \alpha_c)$ exhibits a continuous but sharp transition (vertical slope) at the critical point $\zeta = \zeta_0$. To test this feature in other conditions we impose another geometric transformation and we observe qualitatively the same type of transition of the rate of instability at the critical point. Our model does not contain the description of the whole process that begin by the quasi-static slip localization nevertheless, in the critical initiation regime, minor changes in the parameters of the model have great consequences on the rate of instability. This tends to predict a rapid evolution of a fault system around its critical point. This specific behavior may be of great interest to understand fault instability and earthquake triggering.

Acknowledgments

All the computations presented in this paper were performed at the Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble (SCCI).

Bibliography

- Campillo, M. and I.R. Ionescu.
Initiation of an Antiplane Shear Instability under Slip Dependent Friction.
J. Geophys. Res., 102, 20363-20371, 1997.
- Dasalu, C., I.R. Ionescu, and M. Campillo.
Fault Finiteness and Initiation of Dynamic Shear Instability.
Earth and Planet. Sci. Let., In Press.
- Day, S.M..
Three-Dimensional Simulation of Spontaneous Rupture: The Effect of Nonuniform Prestress.
Bull. Seism. Soc. Am., 72, 1881-1902, 1982.
- Ellsworth, W.L. and G.C., Beroza.
Seismic evidence for an earthquake nucleation phase.
Science, 268 851-855, 1995.
- Favreau, P., M. Campillo and I.R. Ionescu.
Initiation of In-Plane Shear Instability under Slip-Dependent Friction.
Bull. Seism. Soc. Am., 89, 1281-1295, 1999.
- Ida, Y.
Cohesive force along the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy.
J. geophys. Res. 77, 3796-3805, 1972.
- Ionescu, I.R. and M. Campillo.
Numerical Study of Initiation: Influence of Non-Linearity and Fault Finiteness.
J. Geophys. Res., 104, 3013-3024, 1999.
- Iio, Y.
Slow initial phase of the P-wave velocity pulse generated by microearthquakes.
Geophys. Res. Let., 19, 477-480, 1992.
- Iio, Y., Ohmi, S., Ikeda, R., Yamamoto, E., Ito, H., Sato, H., Kuwahara, Y., Ohminato, T., Shibasaki, B. and Ando, M.
Slow initial phase generated by microearthquakes occurring in the western Nagano prefecture, Japan - The source effect.
Geophys. Res. Let., 26, 1979-1972, 1999.
- Kostrov, B. V.
Self-similar problems of propagation of shear cracks.
J. Appl. Math. Mech., 28, 1077-1087, 1964.
- Madariaga, R.
Dynamics of an Expanding Circular Fault.
Bull. Seism. Soc. Am., 66, 639-666, 1976.
- Madariaga, R., K., Olsen and R. Archuleta.
Modeling Dynamic Rupture in 3D Earthquake Fault Model.
Bull. Seism. Soc. Am., 88, 1182-1197, 1998.

Ohnaka, M., Y. Kuwahara and K. Yamamoto.

Constitutive Relations between Dynamic Physical Parameters near a Tip of the Propagation Slip during Stick-slip Shear Failure.

Tectonophysics, 144, 109-125, 1987.

Ohnaka M. and L. Shen.

Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation: Implication of geometry irregularity of the rupturing surfaces.

J. Geophys. Res., 104, 817-844, 1999.

Rice, J.R.

Spatio-temporal complexity of slip on a fault. In *J. Geophys. Res.*, 98, 9885-9907, 1993.

Virieux, J. and R. Madariaga.

Dynamic Faulting Studied by a Finite Difference Method.

Bull. Seism. Soc. Am., 72, 345-369, 1982.

Appendix A: Eigenvalue Problem of the Infinite Fault. The problem being linearized, eigenfunctions $(\Phi^\lambda(x, y, z), \Psi_i^\lambda(x, y, z), i = x, y, z)$ verify in the half space $z > 0$:

$$\lambda^2 \Phi^\lambda = v_p^2 \nabla^2 \Phi^\lambda \quad (3.33)$$

$$\lambda^2 \Psi_i^\lambda = v_s^2 \nabla^2 \Psi_i^\lambda, i = x, y, z \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \Psi_x^\lambda}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y^\lambda}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z^\lambda}{\partial z} = 0 \quad (3.35)$$

and on the fault at $z = 0$:

$$(\eta^2 - 2) \left(\frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi_y^\lambda}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_x^\lambda}{\partial y \partial z} \right) = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x^\lambda}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z^\lambda}{\partial x} = 0 \quad (3.37)$$

$$2 \frac{\partial^2 \Phi^\lambda}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_z^\lambda}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_x^\lambda}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi_y^\lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi_y^\lambda}{\partial z^2} = -\alpha_c \left(\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z^\lambda}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y^\lambda}{\partial z} \right) \quad (3.38)$$

We only search the eigenvalues whose real part is positive ($Re(\lambda) > 0$). Let us recall some results obtained in the context of the in-plane problem (see again Favreau et al. (1999)) that are still valid here. All eigenvalues have a real square $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ consequently λ is imaginary or real. Further, if one wants to find the eigenfunctions with $Re(\lambda) > 0$, (finally $\lambda \in \mathbb{R}$ in our case), it is enough to search them in the following set of functions

$$\Phi^\lambda(x, y, z) = e^{ik_x x + ik_y y - p z} \quad (3.39)$$

$$\Psi_i^\lambda(x, y, z) = S_i e^{ik_x x + ik_y y - s z}, i = x, y, z \quad (3.40)$$

$$s \in \mathbb{R}^+, s > \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.41)$$

$$p \in \mathbb{R}^+, p = \frac{1}{\eta} \sqrt{(\eta^2 - 1)(k_x^2 + k_y^2) + s^2} \quad (3.42)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda = \pm v_s \sqrt{s^2 - k_x^2 - k_y^2} \quad (3.43)$$

where $(k_x, k_y) \in \mathbb{R}^2$ represent the wave numbers of the slip in the Fourier domain. One verifies that the functions of this set verify (3.33) and (3.34) and the finite energy principle since the slip is bound at $z = +\infty$ already.

Inserting (3.39) and (3.40) in (3.35), (3.36), (3.37) and (3.38) leads to

$$i S_x k_x + i S_y k_y = S_z s \quad (3.44)$$

$$k_x^2 + k_y^2 + s^2 = 2is(S_y k_x - S_x k_y) \quad (3.45)$$

$$i(k_y - S_z k_x) = S_x s \quad (3.46)$$

$$-2ik_x p - i S_z k_y s - S_y(s^2 + k_x^2) + S_x k_y k_x = -\alpha_c(ik_x + i S_z k_y + S_y s) \quad (3.47)$$

By solving the system of linear equations (3.44), (3.45) and (3.46) we deduce the amplitude (S_x, S_y, S_z) of the components (Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z) :

$$S_x = \frac{ik_y}{2s} \quad (3.48)$$

$$S_y = \frac{k_x^4 - s^4 + k_y^2(k_x^2 + s^2)}{2isk_x(k_x^2 + k_y^2 - s^2)} \quad (3.49)$$

$$S_z = \frac{k_y}{2k_x} \quad (3.50)$$

Replacing the amplitudes (3.48), (3.49) and (3.50) in the linearized frictional condition (3.47), we have:

$$p = \frac{(s^2 + k_x^2)^2 - k_y^2(s^2 - k_x^2) + s\alpha_c(k_x^2 + k_y^2 - s^2)}{4k_x^2 s} \quad (3.51)$$

Finally a solution of the eigenvalue problem must satisfy both equations (3.42) and (3.51). By taking the polar coordinates in the Fourier domain ($k_x = k \cos \theta, k_y = k \sin \theta$) and by taking dimensionless variables $\bar{p} = p/k, \bar{s} = s/k$ and $\bar{\alpha}_c = \alpha_c/k$, equations (3.42) and (3.51) become respectively:

$$\bar{p} = \bar{p}_1(\bar{s}) = \frac{1}{\eta} \sqrt{\eta^2 - 1 + \bar{s}^2} \quad (3.52)$$

$$\bar{p} = \bar{p}_2(\bar{s}) = \frac{(\bar{s}^2 + \cos^2 \theta)^2 - \sin^2 \theta (\bar{s}^2 - \cos^2 \theta) - \bar{s} \bar{\alpha}_c (\bar{s}^2 - 1)}{4\bar{s} \cos^2 \theta} \quad (3.53)$$

For each θ we must find the solutions \bar{s} such that $\bar{p}_1(\bar{s}) - \bar{p}_2(\bar{s}) = 0$ and λ is real i.e. $\bar{s} > 1$. We remark that $\bar{s} = 1$ is a solution for any θ . It corresponds to a null solution. We also remark that if the slope of the function $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(\bar{s})$ at $\bar{s} = 1$ is positive then the function $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(\bar{s})$ has another non trivial root $\bar{s} > 1$. This condition is

$$\frac{d(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{d\bar{s}}(1) > 0 \Rightarrow \bar{\alpha}_c > \gamma \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \quad \text{with} \quad \gamma = 2(1 - \frac{1}{\eta^2}) = 2(1 - \frac{v_s^2}{v_p^2}) \quad (3.54)$$

On Figure 3.11, we represent the curves $\bar{p}_1(\bar{s})$ and $\bar{p}_2(\bar{s})$ for $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$. For each case we make the plots with $\bar{\alpha}_c$ respectively "low", "critical" and "high". which means respectively that condition (3.54) is not respected ($\lambda < 0$), just respected ($\lambda = 0$) and fully respected ($\lambda > 0$). Note that $\theta = 0$ corresponds to in-plane mode and $\theta = \pi/2$ to anti-plane mode. Numerical values are defined at the end of appendix C.

If one denotes by $k_{xc} = \frac{\alpha_c}{\gamma}$ the spectral cut-off in the in-plane direction and by $k_{yc} = \alpha_c$ the spectral cut-off in the anti-plane direction, the condition of existence of real eigenvalue (3.54) can be translated again in a dimensional form

$$\frac{k_x^2}{k_{xc} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} + \frac{k_y^2}{k_{yc} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}} < 1 \quad (3.55)$$

By D_s we denote the spectral domain defined by (3.55).

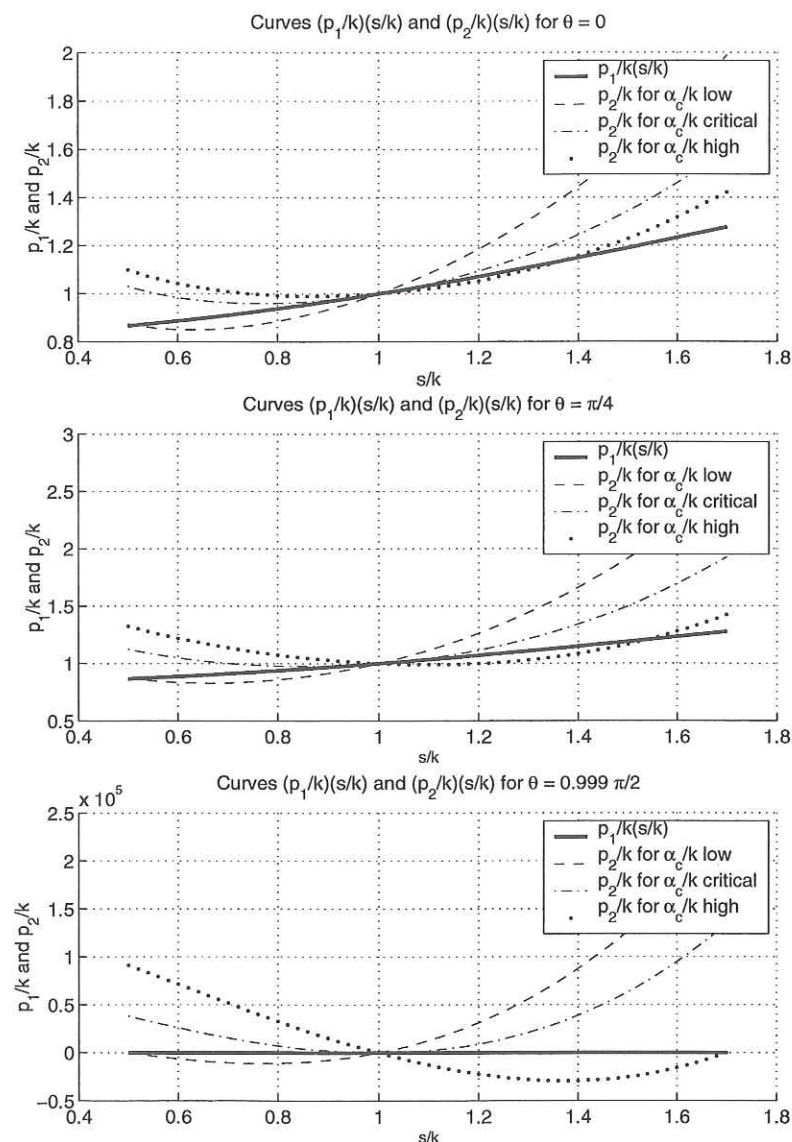


FIG. 3.11 – The analysis of $(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)(\bar{s})$ ($\eta = \sqrt{3}$) leading to the condition of existence of real eigenvalues.

Appendix B: Dominant Part of the Infinite Fault. The dominant part is constructed on the base of the eigenfunctions with real λ . Let us define the functions $u_i^{k_x, k_y}(z)$ derived from the z -dependence of eigenfunctions (3.39) and (3.40) by using (3.48), (3.49) and (3.50):

$$u_x^{k_x, k_y}(z) = s(-2k_x^2 e^{-pz} + (s^2 + k_x^2 - k_y^2)e^{-sz}) \quad (3.56)$$

$$u_y^{k_x, k_y}(z) = -2sk_x k_y (e^{-pz} - e^{-sz}) \quad (3.57)$$

$$u_z^{k_x, k_y}(z) = ik_x(-2pse^{-pz} + (s^2 + k_x^2 + k_y^2)e^{-sz}) \quad (3.58)$$

Using these functions the displacement field is written

$$u_i^d(t, x, y, z) = \iint_{D_s} u_i^{k_x, k_y}(z) e^{i(k_x x + k_y y)} \left(W_0(k_x, k_y) \cosh(\lambda t) + \frac{W_1(k_x, k_y)}{\lambda} \sinh(\lambda t) \right) dk_x dk_y \quad (3.59)$$

where weights $W_0(k_x, k_y)$ are calculated from the x - y -Fourier transform of the initial conditions in displacement $\tilde{u}_i^0(k_x, k_y, z)$. For this we assume that the eigenfunctions are orthogonal. The orthogonality is demonstrated in the in-plane case by Favreau et al. (1999) and this result can be extended to the 3D study. Therefore we can use a technique of normalized projection of the initial conditions on the eigenfunctions and we find

$$W_0(k_x, k_y) = \frac{1}{N(k_x, k_y)} \int_0^{+\infty} \sum_{i=x, y, z} \left((u_i^{k_x, k_y})^*(z) \tilde{u}_i^0(k_x, k_y, z) \right) dz \quad (3.60)$$

where

$$\begin{aligned} N(k_x, k_y) &= 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \sum_{i=x, y, z} \left((u_i^{k_x, k_y})^*(z) u_i^{k_x, k_y}(z) \right) dz \\ &= \frac{2\pi^2}{sp} (s^2 k_x^2 (4s(k_x^2 + p^2) - 5p(s^2 + k_x^2)) + p(s^6 + k_x^6)) \\ &\quad + \frac{2\pi^2}{sp} k_y^2 (4s^3 k_x^2 + p(k_y^2(s^2 + k_x^2) + 2(k_x^4 - s^4) - 4s^2 k_x^2)) \end{aligned} \quad (3.61)$$

The weights $W_1(k_x, k_y)$ are calculated in the same way by taking the x - y -Fourier transform of the initial conditions in velocity $\tilde{v}_i^0(k_x, k_y, z)$.

Appendix C: Time of Initiation of the Infinite Fault. For a narrow perturbation of characteristic half width a , we can estimate the time of initiation T_c to reach the critical slip L_c on the fault. For this purpose we write the simplified expression of $u_x^d(t, x, y, 0)$ on the fault, due to a perturbation of displacement $u_x^0(x, y, z)$ and velocity $v_x^0(x, y, z)$. We get

$$u_x^d(t, x, y, 0) = \frac{1}{v_s^2} \iint_{D_s} s \lambda^2 e^{i(k_x x + k_y y)} \left(W_0(k_x, k_y) \cosh(\lambda t) + \frac{W_1(k_x, k_y)}{\lambda} \sinh(\lambda t) \right) dk_x dk_y \quad (3.62)$$

$$(3.63)$$

If $a\alpha_c \ll 1$ we can take the following approximation for (3.60):

$$W_0(k_x, k_y) \approx W_0(0, 0) = \frac{1}{2\pi\alpha_c^2} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^0(x, y, z) e^{-\alpha_c z} dx dy dz \quad (3.64)$$

The same approximation can be done on $W_1(k_x, k_y)$ by taking $v_x^0(x, y, z)$ instead of $u_x^0(x, y, z)$ in (3.64).

If $\lambda(0, 0)T_c \gg 1$ i.e. $T_c \gg 1/(\alpha_c v_s)$ we can do other approximations. The slip is driven by the most dominant eigenfunction i.e. the one for which $k_x = k_y = 0$. The integrand is null on the boundary of D_s because the corresponding eigenfunctions are null. Therefore the integrand in (3.62) is approximated by a linear approximation on each radius in the Fourier domain. Consequently the integration over D_s in (3.62) is approximated by the volume of a cone. Its base is D_s and its height is the value of the integrand at $k_x = k_y = 0$. For that we need to calculate the surface of D_s which is $\frac{\pi \alpha_c^2 (\gamma + 1)}{2 \gamma^{3/2}}$. Finally $\cosh(\dots)$ and $\sinh(\dots)$ are approximated by $e^{(\dots)}/2$. By applying all this to (3.62) we obtain

$$u_x^d(T_c, 0, 0, 0) = \frac{1}{v_s^2} \frac{1}{3} \frac{\pi \alpha_c^2 (\gamma + 1)}{2 \gamma^{3/2}} v_s^2 \alpha_c^3 \left(W_0(0, 0) + \frac{W_1(0, 0)}{v_s \alpha_c} \right) \frac{e^{v_s \alpha_c T_c}}{2} \quad (3.65)$$

By identifying $u_x^d(T_c, 0, 0, 0)$ with L_c we have

$$T_c = \frac{1}{\alpha_c v_s} \ln \left(\frac{L_c}{\frac{\pi \alpha_c^2 (\gamma + 1)}{12 \gamma^{3/2}} \left(W_0(0, 0) + \frac{W_1(0, 0)}{v_s \alpha_c} \right)} \right) \quad (3.66)$$

For a narrow Gaussian velocity perturbation of half width a defined by $v_x^0(x, y, z) = v_0 e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/a^2}$ we have

$$W_1(k_x, k_y) = \frac{v_0 s \pi^{\frac{3}{2}} a^3 e^{-(k_x^2 + k_y^2) a^2 / 4} \left(-2 k_x^2 e^{-p^2 a^2 / 4} \text{Erfc}\left(\frac{p a}{2}\right) + (s^2 + k_x^2 - k_y^2) e^{-s^2 a^2 / 4} \text{Erfc}\left(\frac{s a}{2}\right) \right)}{2 N(k_x, k_y)} \quad (3.67)$$

where Erfc is the complementary error function. Therefore

$$W_1(0, 0) = \frac{v_0 a^3}{4 \pi^{\frac{1}{2}} \alpha_c^2} e^{-\alpha_c^2 a^2 / 4} \text{Erfc}\left(\frac{\alpha_c a}{2}\right) \quad (3.68)$$

Finally

$$T_c = \frac{1}{\alpha_c v_s} \left(\ln \left(\frac{48 \gamma^{3/2}}{\pi^{1/2} (\gamma + 1) \alpha_c^2 a^2} \frac{L_c v_s}{a v_0} \frac{1}{\text{Erfc}\left(\frac{\alpha_c a}{2}\right)} \right) + \frac{\alpha_c^2 a^2}{4} \right) \quad (3.69)$$

With $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333 \text{ m s}^{-1}$, $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$ and $L_c = 0.18 \text{ m}$ one obtain $\alpha_c = 0.0017 \text{ m}^{-1}$. Moreover with $\eta = v_p/v_s = \sqrt{3}$ i.e. $\gamma = 2(1 - 1/\eta^2) = 4/3$, $a = 200 \text{ m}$ and $v_0 = 0.0001 \text{ m s}^{-1}$, formula (3.69) gives $T_c = 2.81 \text{ sec}$.

Appendix D: Link with 2D results. In 2D (anti-plane and in-plane) an elementary 2D finite fault is a slip weakening segment of length $2a$ limited by barriers of infinite strength (no slip in the barrier). We have studied the influence of the finiteness numerically (Ionescu & Campillo (1999)) and theoretically (Dascalu et al. (2000)) for the anti-plane finite fault. Near to the stability, i.e. for real eigenvalue such that $1/|\lambda|$ is greater than the wave travel time in fault a/v_s , the spectral problem in time has been formulated with an integral equation on the fault displacement $u^\lambda(x)$ as follows

$$\pi \alpha_c a u^\lambda(ax') = PV \int_{-1}^1 \frac{\partial_x u^\lambda(as') ds}{x' - s'} - \left(\frac{a \lambda}{v_s} \right)^2 \int_{-1}^1 u^\lambda(as') \ln \left| \frac{a \lambda}{v_s} (s' - x') \right| ds', \quad \left| \frac{a \lambda}{v_s} \right| \ll 1 \quad (3.70)$$

From these we can extract two points. First, when the product $\beta = a \alpha_c$ of the fault half length a with the weakening parameter α_c is less than $\beta_0 = 1.1577\dots$ then the eigenvalue analysis gives no real positive λ and the fault is stable. Second when this product is larger than β_0 (i.e. $\beta > \beta_0$) there exists a discrete collection of real positive eigenvalue $\lambda_n(\beta)$. The total number of positive eigenvalue grows with β . The first and largest one $\lambda_0(\beta)$ gives the characteristic exponent of the slip growth (i.e. the slip grows like $e^{\lambda_0 t}$) and it makes it possible to give naturally an order of magnitude of the time of initiation. Indeed, the time of initiation is inversely proportional to λ_0 . In the in-plane geometry we found similar results. The antiplane and inplane eigenvalue problems, expressed in the x-Fourier domain k have a similar Taylor expansion around 0 at order 2 in $|\lambda/(k v_s)|$. Consequently, under the condition $|\lambda/(k v_s)| \ll 1$, the governing equation for the displacement in the in-plane problem is the same as in the anti-plane problem, by replacing α_c by α_c/γ and λ by $\lambda \epsilon$, with $\epsilon = \sqrt{(1 + 1/\eta^4)/\gamma}$. This variable change is valid for the static eigenvalue problem i.e. for $\lambda = 0$. Unfortunately, for λ great enough, our parallel in the x-Fourier domain k is intrinsically incorrect. Its validity remains only very close to the critical point. Another common characteristic of the anti-plane and in-plane problems is the maximum eigenvalue $v_s \alpha_c$ of the infinite faults that corresponds to $\beta = \infty$ (see Campillo & Ionescu (1997) and Favreau et al. (1999)). To make a clear link between the present 3D study and the previous 2D studies we have to precise a few things. For 2D problems $\zeta = 2a/l_c$ where l_c is the length of the 2D slipping patch ($l_c = \pi/\alpha_c$ in anti-plane and $l_c = \gamma\pi/\alpha_c$ in in-plane). Consequently $\zeta = (2/\pi)\beta$ in anti-plane and $\zeta = (2/\pi)\beta\gamma$ in in-plane. By choosing ζ we make disappear the P wave velocity in the position of the critical point. Therefore anti-plane and in-plane have the same critical point at $\zeta_0 = 0.7370\dots$. Also since the maximal eigenvalue in all homogeneous infinite shear problem is $v_s \alpha_c$ we propose to plot systematically the dimensionless eigenvalue $\lambda_0(\zeta)/(v_s \alpha_c)$. On Figure 3.12 we re-plot the eigenvalue found by Dascalu et al. (2000) in these new notations. We also add the complementary results for in-plane finite faults.

3.1.2 La méthode numérique de différences finies.

Introduction Les schémas numériques de différences finies utilisés en 2D et en 3D sont semblables. Le schéma est inspiré du schéma antiplan utilisé par Ionescu & Campillo (1999). On n'exposera que le schéma en 3D puisque les schémas 2D sont construits sur le même principe. L'algorithme est du second ordre, explicite, formulé en vitesse/contrainte. La coordonnée z est perpendiculaire à la faille. Les pas d'espace et de temps de la grille sont notés Δl et Δt . Les vitesses et les contraintes sont évaluées dans le milieu (corps élastique) de droite aux positions $(t = n \Delta t, x = i \Delta l, y = j \Delta l, z = (k - \frac{1}{2}) \Delta l)$, $k \geq 1$ et dans le milieu de gauche aux positions $(t = n \Delta t, x = i \Delta l, y = j \Delta l, z = (k + \frac{1}{2}) \Delta l)$, $k \leq -1$. Les déplacements, les vitesses et les contraintes agissant sur la faille ($\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$) sont évaluées aux positions décalées $(t = (n + \frac{1}{2}) \Delta t, x = i \Delta l, y = j \Delta l, z = 0^\pm)$. On notera plus succinctement ces positions d'une manière adimensionnelle (n, i, j, k) , $k \neq 0$ dans le milieu et $(n + \frac{1}{2}, i, j, 0^\pm)$ sur la faille. Le calcul se fait en deux étapes: La première étape est le calcul des vitesses, des déplacements et des contraintes agissant sur la faille ($\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$) en passant par des positions successives $(n - \frac{1}{2} + m, i, j, 0^\pm)$ suivant le temps local $0 < m < 1$. La deuxième étape consiste à calculer les vitesses et les contraintes dans le corps élastique aux positions $(n + 1, i, j, k)$ et en intégrant la faille comme une condition de bord à vitesse imposée. Une visualisation de la grille dans le plan (t, z) est dessinée dans la figure 3.13 pour ce qui concerne le traitement de la faille. Pour établir l'algorithme, rappelons les équations combinées de l'équilibre dynamique et de l'élasticité

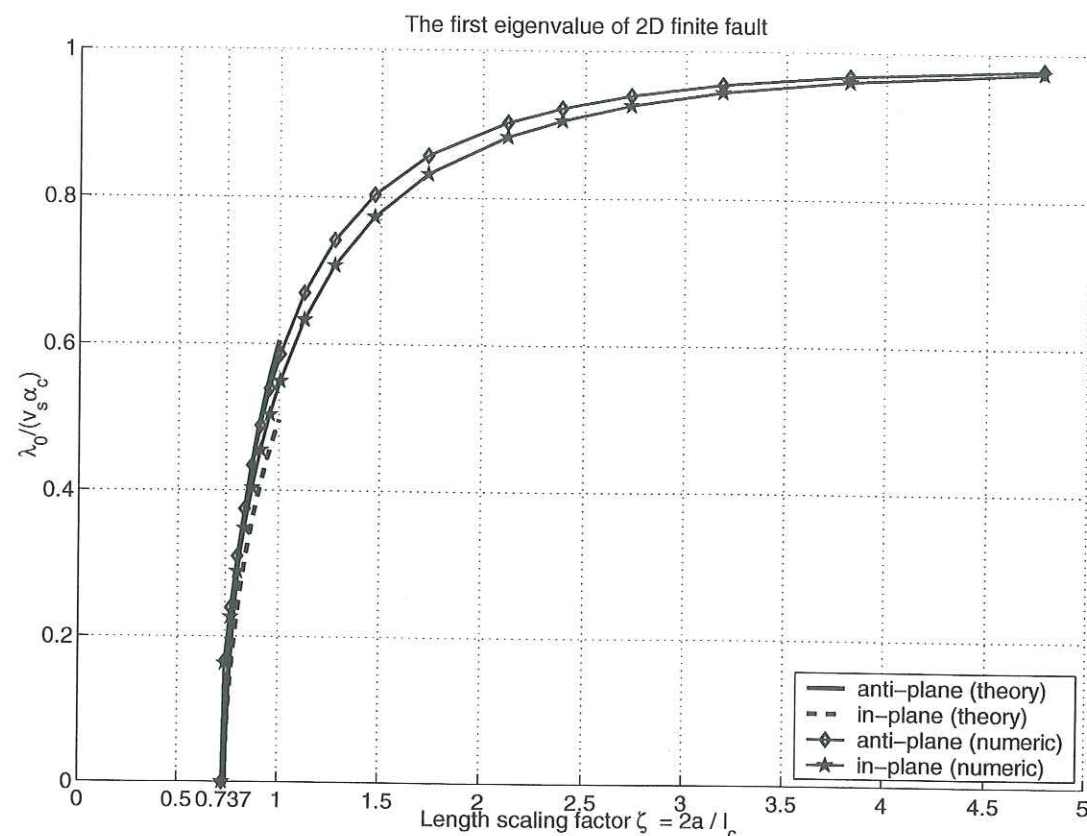


FIG. 3.12 – The exponent (or first eigenvalue) for 2D finite faults as a function of the length scaling factor ζ .

dans un corps élastique homogène isotrope de masse volumique ρ :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} & \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} & \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{z_p v_p \partial t} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + q \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) & \frac{\partial \sigma_{xy}}{z_s v_s \partial t} &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial \sigma_{yy}}{z_p v_p \partial t} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} + q \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{z_p v_p \partial t} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} + q \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) & \frac{\partial \sigma_{xz}}{z_s v_s \partial t} &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{\partial \sigma_{yz}}{z_s v_s \partial t} &= \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

où $z_p = \rho v_p$ est l'impédance des ondes P, $z_s = \rho v_s$ est l'impédance des ondes S et $q = 1 - 2 \frac{v_s^2}{v_p^2}$.

Algorithme pour le calcul des vitesses et des contraintes sur la faille. Pour formaliser cet algorithme, nous partons des équations de conservation sur les droites de causalité du type $w^\pm = z \mp v_s t$ pour les ondes S et $w^\pm = z \mp v_p t$ pour les ondes P. En une dimension on appelle ces droites "lignes caractéristiques". Ces droites sont tracées sur la figure 3.13 à gauche. On se place dans un cas général où les deux milieux sont différents de chaque côté de la faille. Pour plus de simplicité et de lisibilité on établira les relations importantes dans le milieu de droite $z > 0$. On donnera ensuite la façon d'obtenir celles dans le milieu de gauche $z < 0$.

En prenant $w^\pm = z \mp v_s t$ on déduit:

$$\frac{\partial(z_s v_x + \sigma_{xz})}{\partial w^+}(w^+, w^-) = - \left(\frac{\partial(\sigma_{xx} + z_s v_z)}{2 \partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{2 \partial y} \right) (w^+, w^-) \quad (3.71)$$

Cosidérons une fonction $f(t, z)$ et la même fonction exprimée dans les autres coordonnées telle que $\tilde{f}(w^+, w^-) = f(t, z)$. Prenons w^- constant, ce qui impose que pour deux positions quelconques on vérifie $t_1 = t_2 - (z_1 - z_2)/v_s$. Alors on a:

$$\int_{w_1^+}^{w_2^+} \tilde{f}(w^-, w^+) dw^+ = -2(z_1 - z_2) \int_0^1 f \left(t_2 - \frac{z_1 - z_2}{v_s} (1 - \tau), z_2 + (z_1 - z_2)(1 - \tau) \right) d\tau \quad (3.72)$$

On intègre (3.71) à l'aide de (3.72) et on trouve la relation de conservation suivante:

$$\begin{aligned} (z_s v_x + \sigma_{xz})(t_2, x, y, z_2) &= (z_s v_x + \sigma_{xz}) \left(t_2 - \frac{z_1 - z_2}{v_s}, x, y, z_1 \right) \\ + (z_1 - z_2) \int_0^1 &\left(\frac{\partial(\sigma_{xx} + z_s v_z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \left(t_2 - \frac{z_1 - z_2}{v_s} (1 - \tau), z_2 + (z_1 - z_2)(1 - \tau) \right) d\tau \quad (3.73) \end{aligned}$$

En choisissant $z_2 = 0^+$ sur la lèvres droite de la faille et $z_1 = \frac{\Delta l}{2}$ décalé d'un demi-pas d'espace à droite dans le milieu, on transforme (3.73) en:

$$\begin{aligned} (z_s v_x + \sigma_{xz})(t_2, x, y, 0^+) &= (z_s v_x + \sigma_{xz}) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2} \right) \\ + \frac{\Delta l}{2} \int_0^1 &\left(\frac{\partial(\sigma_{xx} + z_s v_z)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s} (1 - \tau), x, y, \frac{\Delta l}{2} (1 - \tau) \right) d\tau \quad (3.74) \end{aligned}$$

Cette équation nous permet de relier le premier couple vitesse/contrainte (v_x/σ_{xz}) agissant sur la faille en fonction de l'information venant du corps élastique. De la même manière on peut trouver la relation qui relie le deuxième couple vitesse/contrainte (v_y/σ_{yz}) agissant sur la faille:

$$\begin{aligned} (z_s v_y + \sigma_{yz})(t_2, x, y, 0^+) &= (z_s v_y + \sigma_{yz}) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2} \right) \\ + \frac{\Delta l}{2} \int_0^1 &\left(\frac{\partial(\sigma_{yy} + z_s v_z)}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s} (1 - \tau), x, y, \frac{\Delta l}{2} (1 - \tau) \right) d\tau \quad (3.75) \end{aligned}$$

Dans les équations (3.74) et (3.75) on peut faire apparaître certains déplacements. En effet on a les relations suivantes:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 2z_s v_s \left((1 + q) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + q \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} \quad (3.76)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 2z_s v_s \left((1 + q) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + q \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial y} \quad (3.77)$$

L'utilisation des dérivées secondes des déplacements sur la faille permet de mieux simuler les concentrations de contraintes. On remplace (3.76) et (3.77) respectivement dans (3.74)

et (3.75), on coupe l'intégrale en deux et on obtient:

$$\begin{aligned} (z_s v_x + \sigma_{xz})(t_2, x, y, 0^+) &= (z_s v_x + \sigma_{xz})(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2}) \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2z_s v_s \left((1+q) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial(q\sigma_{zz} + z_s v_z)}{\partial x} \right) \\ &\quad \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}(1-\tau), x, y, \frac{\Delta l}{2}(1-\tau) \right) d\tau \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial(\sigma_{xx} + z_s v_z)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}(1-\tau), x, y, \frac{\Delta l}{2}(1-\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} (z_s v_y + \sigma_{yz})(t_2, x, y, 0^+) &= (z_s v_y + \sigma_{yz})(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2}) \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2z_s v_s \left((1+q) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial(q\sigma_{zz} + z_s v_z)}{\partial y} \right) \\ &\quad \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}(1-\tau), x, y, \frac{\Delta l}{2}(1-\tau) \right) d\tau \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial(\sigma_{yy} + z_s v_z)}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}(1-\tau), x, y, \frac{\Delta l}{2}(1-\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.79)$$

Enfin en considérant les lignes caractéristiques du type $w^\pm = z \mp v_p t$, on trouve la relation pour le troisième couple vitesse/contrainte (v_z/σ_{zz}):

$$\begin{aligned} (z_p v_z + \sigma_{zz})(t_2, x, y, 0^+) &= (z_p v_z + \sigma_{zz})(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_p}, x, y, \frac{\Delta l}{2}) \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial(\sigma_{xz} + qz_p v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yz} + qz_p v_y)}{\partial y} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_p}(1-\tau), x, y, \frac{\Delta l}{2}(1-\tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (3.80)$$

A partir de ce point, on est obligé d'introduire des approximations. Pour (3.78) et (3.79) la première intégrale est évaluée avec l'intégrand développé à l'ordre 0 en $\tau = 1$. La deuxième intégrale est évaluée avec l'intégrand développé à l'ordre 0 en $\tau = 0$. On obtient:

$$\begin{aligned} (z_s v_x + \sigma_{xz})(t_2, x, y, 0^+) &\approx (z_s v_x + \sigma_{xz})(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2}) \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \left(z_s v_s \left((1+q) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial(q\sigma_{zz} + z_s v_z)}{\partial x} \right) (t_2, x, y, 0^+) \\ &\quad + \frac{\Delta l}{4} \left(\frac{\partial(\sigma_{xx} + z_s v_z)}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2} \right) \quad (3.81) \\ (z_s v_y + \sigma_{yz})(t_2, x, y, 0^+) &\approx (z_s v_y + \sigma_{yz})(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2}) \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \left(z_s v_s \left((1+q) \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial(q\sigma_{zz} + z_s v_z)}{\partial y} \right) (t_2, x, y, 0^+) \\ &\quad + \frac{\Delta l}{4} \left(\frac{\partial(\sigma_{yy} + z_s v_z)}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2} \right) \quad (3.82) \end{aligned}$$

Pour (3.80) l'intégrale est évaluée sur $0 < \tau < 1$ avec l'intégrand développé à l'ordre 0 en $\tau = 0$. On obtient:

$$\begin{aligned} (z_p v_z + \sigma_{zz})(t_2, x, y, 0^+) &\approx (z_p v_z + \sigma_{zz})(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_p}, x, y, \frac{\Delta l}{2}) \\ &+ \frac{\Delta l}{2} \left(\frac{\partial(\sigma_{xz} + qz_p v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yz} + qz_p v_y)}{\partial y} \right) \left(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_p}, x, y, \frac{\Delta l}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.83)$$

Dans l'algorithme on se place maintenant au temps local $t_2 = (n - \frac{1}{2} + m)\Delta t$ avec $0 < m < 1$. Ainsi les expressions fonctions de l'argument $(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_s}, x, y, \frac{\Delta l}{2})$ dans (3.81) et (3.82) sont évaluées au temps $t_2 = (n - \frac{1}{2} - \frac{v_0}{2v_s} + m)\Delta t$ et les expressions fonctions de l'argument $(t_2 - \frac{\Delta l}{2v_p}, x, y, \frac{\Delta l}{2})$ dans (3.83) sont évaluées au temps $t_2 = (n - \frac{1}{2} - \frac{v_0}{2v_p} + m)\Delta t$ où $v_0 = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ est la vitesse fictive correspondant à la grille (cf figure 3.13 à gauche). Ces expressions sont données par le champ incident qui provient du milieu. Comme elles ne sont évaluées que tous les temps n entiers, on les approche linéairement en temps entre $m = 0$ et $m = 1$. Ainsi pour exprimer (3.81) on va écrire plus simplement:

$$\begin{aligned} (z_s v_x + \sigma_{xz})^{n-\frac{1}{2}+m, i, j, 0^+} &\approx A_x^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s}, i, j, 1} + \left(A_x^{n+\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s}, i, j, 1} - A_x^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s}, i, j, 1} \right) m + B_x^{n-\frac{1}{2}+m, i, j, 0^+} \\ A_x &= z_s v_x + \sigma_{xz} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial(\sigma_{xx} + z_s v_z)}{\partial i} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial j} \right) \\ B_x &= \frac{z_s v_s}{2v_0 \Delta t} \left((1+q) \frac{\partial^2 u_x}{\partial i^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial i \partial j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial j^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial(q\sigma_{zz} + z_s v_z)}{\partial i} \right) \end{aligned} \quad (3.84)$$

et pour exprimer (3.82):

$$\begin{aligned} (z_s v_y + \sigma_{yz})^{n-\frac{1}{2}+m, i, j, 0^+} &\approx A_y^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s}, i, j, 1} + \left(A_y^{n+\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s}, i, j, 1} - A_y^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s}, i, j, 1} \right) m + B_y^{n-\frac{1}{2}+m, i, j, 0^+} \\ A_y &= z_s v_y + \sigma_{yz} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial(\sigma_{yy} + z_s v_z)}{\partial j} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial i} \right) \\ B_y &= \frac{z_s v_s}{2v_0 \Delta t} \left((1+q) \frac{\partial^2 u_y}{\partial j^2} + (q + \frac{1}{2}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial i \partial j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial i^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial(q\sigma_{zz} + z_s v_z)}{\partial j} \right) \end{aligned} \quad (3.85)$$

et enfin de la même manière on trouve pour (3.83):

$$\begin{aligned} (z_p v_z + \sigma_{zz})^{n-\frac{1}{2}+m, i, j, 0^+} &\approx A_z^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_p}, i, j, 1} + \left(A_z^{n+\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_p}, i, j, 1} - A_z^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_p}, i, j, 1} \right) m \\ A_z &= z_p v_z + \sigma_{zz} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\sigma_{xz} + qz_p v_x)}{\partial i} + \frac{\partial(\sigma_{yz} + qz_p v_y)}{\partial j} \right) \end{aligned} \quad (3.86)$$

Les opérateurs $\partial/\partial i = \Delta l \partial/\partial x$ et $\partial/\partial j = \Delta l \partial/\partial y$ désignent les dérivations partielles adimensionnelles. Pratiquement les quantités évaluées au temps $n + \frac{1}{2} - \frac{v_0}{2v_s}$ et au temps $n + \frac{1}{2} - \frac{v_0}{2v_p}$ sont déduites par une interpolation linéaire entre les deux temps entiers qui l'encadrent. Cela nécessite de garder suffisamment de points précédents en mémoire près de la faille (en $k = -1$ et en $k = 1$). Des équations similaires sont obtenues pour la lèvres gauche ($z = 0^-$). Pour cela il faut remplacer les indices $\dots, i, j, 0^+$ par $\dots, i, j, 0^-$ et $\dots, i, j, 1$ par $\dots, i, j, -1$. Ensuite il faut remplacer σ_{xz} et v_z par leur opposé dans (3.84), σ_{yz} et v_z par leur opposé dans (3.85) et enfin σ_{zz} , v_x et v_y par leur opposé dans (3.86). Il faut aussi changer les caractéristiques du milieu par celle du milieu de gauche. Pour alléger on note $^+$ et $^-$ ce qui se rapporte à droite et à gauche.

Enfin on utilise une combinaison linéaire de (3.84) à droite et à gauche et on a:

$$\frac{d}{dm} \frac{\delta u_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j}}{\Delta t} + \left(\frac{1}{z_s^+} + \frac{1}{z_s^-} \right) \sigma_{xz}^{n-\frac{1}{2}+m,i,j,0} \approx \quad (3.87)$$

$$AD_x^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s},i,j} + \left(AD_x^{n+\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s},i,j} - AD_x^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s},i,j} \right) m + BD_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j}$$

$$AD_x^{\dots,i,j} = \frac{1}{z_s^+} A_x^{\dots,i,j,1} - \frac{1}{z_s^-} A_x^{\dots,i,j,-1} \text{ et } BD_x^{\dots,i,j} = \frac{1}{z_s^+} B_x^{\dots,i,j,1} - \frac{1}{z_s^-} B_x^{\dots,i,j,-1}$$

et

$$z_s^+ v_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j,0^+} + z_s^- v_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j,0^-} \approx \quad (3.88)$$

$$AS_x^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s},i,j} + \left(AS_x^{n+\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s},i,j} - AS_x^{n-\frac{1}{2}-\frac{v_0}{2v_s},i,j} \right) m + BS_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j}$$

$$AS_x^{\dots,i,j} = A_x^{\dots,i,j,1} + A_x^{\dots,i,j,-1} \text{ et } BS_x^{\dots,i,j} = B_x^{\dots,i,j,1} + B_x^{\dots,i,j,-1}$$

où $\delta u_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j} = u_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j,0^+} - u_x^{n-\frac{1}{2}+m,i,j,0^-}$. On peut écrire le même genre d'équations pour les couples (v_y/σ_{yz}) et (v_z/σ_{zz}) . On supposera toujours que δv_z est nul (pas d'ouverture). Ainsi, sur la faille, la vitesse v_z et la contrainte σ_{zz} évolueront indépendamment du reste et linéairement pendant tout le temps local $0 < m < 1$. Par ailleurs si on suppose que les contraintes de cisaillement agissant sur la faille σ_{xz} et σ_{yz} ne dépendent que des déplacements δu_x et δu_y alors l'équation (3.87) pour le couple (σ_{xz}/v_x) et l'équation similaire pour le couple (v_y/σ_{yz}) formeront un système différentiel 2×2 du premier ordre en temps local $0 < m < 1$. En discrétisant le pas de temps local suffisamment finement (au minimum 40 points), on peut se contenter d'utiliser une méthode d'Euler explicite. Enfin lorsqu'une composante de la vitesse de dislocation est nulle, par exemple δv_x , alors (3.87) donne directement la contrainte σ_{xz} agissant sur la faille. Il en va de même pour (v_y/σ_{yz}) . Les équations du type (3.88) donnent le mouvement moyen de la faille et permettent de recalculer les vitesses à gauche et à droite (rappelons qu'elles n'ont pas de symétrie dans le cas de deux milieux élastiques différents).

Algorithme pour le calcul des vitesses et des contraintes dans le milieu. Dans le milieu, on utilise un schéma de directions alternées (splitting des opérateurs). Le schéma est d'ordre 2 (pour plus de détails voir Nguyen (1998) ou Renard (1998)). On définit trois opérateurs notés X, Y et Z. Chaque opérateur effectue un calcul de différences finies unidimensionnel dans l'une des directions x, y et z. Pour illustrer, prenons l'opérateur Z. La démarche est la même pour les autres opérateurs X et Y. Pour définir Z, on ne considère pas les variations des champs dans les directions x et y, ce qui revient à poser symboliquement $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$ and $\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$ dans les équations du mouvement et de l'élasticité. On en déduit:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\rho \partial t} = v_p^2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.89)$$

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad \frac{\partial \sigma_{yz}}{\rho \partial t} = v_s^2 \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (3.90)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\rho \partial t} = v_s^2 \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = q \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial t} = q \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = 0 \quad (3.93)$$

Avec (3.91) on obtient une équation d'onde pour le couple (σ_{zz}/v_z) avec la vitesse des ondes P tandis qu'avec (3.90) et (3.89), on obtient deux autres équations d'onde pour les couples (v_x/σ_{xz}) et (v_y/σ_{yz}) avec la vitesse des ondes S. Les équations (3.92) traduisent l'effet de Poisson. En effet, dans un mouvement unidimensionnel, l'effet de Poisson implique une variation des deux contraintes normales (ici σ_{xx} et σ_{yy}) qui agissent perpendiculairement au mouvement (ici selon z). Cette variation s'obtient en fonction de la troisième (ici σ_{zz}), qui agit dans le sens du mouvement. Le facteur $displaystyle q = 1 - 2\frac{v_s^2}{v_p^2}$, qui intervient dans cet effet, peut s'exprimer en fonction du coefficient de Poisson ν par $q = \frac{\nu}{1-\nu}$. L'équation (3.93) dit que la contrainte de cisaillement dans le plan perpendiculaire au mouvement est inchangée. L'algorithme est construit à partir des équations de conservation le long des caractéristiques adéquates. Pour l'opérateur Z on prend les caractéristiques des ondes P pour exprimer (3.89) et les caractéristiques des ondes S pour exprimer (3.90) et (3.91). On obtient:

$$v_z^{Z,i,j,k} = (v_z^{n,i,j,k+\frac{v_p}{v_0}} + v_z^{n,i,j,k-\frac{v_p}{v_0}})/2 + (\sigma_{zz}^{n,i,j,k+\frac{v_p}{v_0}} - \sigma_{zz}^{n,i,j,k-\frac{v_p}{v_0}})/(2z_p) \quad (3.94)$$

$$\sigma_{zz}^{Z,i,j,k} = (v_z^{n,i,j,k+\frac{v_p}{v_0}} - v_z^{n,i,j,k-\frac{v_p}{v_0}})z_p/2 + (\sigma_{zz}^{n,i,j,k+\frac{v_p}{v_0}} + \sigma_{zz}^{n,i,j,k-\frac{v_p}{v_0}})/2 \quad (3.95)$$

$$v_y^{Z,i,j,k} = (v_y^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} + v_y^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})/2 + (\sigma_{yz}^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} - \sigma_{yz}^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})/(2z_s) \quad (3.96)$$

$$\sigma_{yz}^{Z,i,j,k} = (v_y^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} - v_y^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})z_s/2 + (\sigma_{yz}^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} + \sigma_{yz}^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})/2 \quad (3.97)$$

$$v_x^{Z,i,j,k} = (v_x^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} + v_x^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})/2 + (\sigma_{xz}^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} - \sigma_{xz}^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})/(2z_s) \quad (3.98)$$

$$\sigma_{xz}^{Z,i,j,k} = (v_x^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} - v_x^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})z_s/2 + (\sigma_{xz}^{n,i,j,k+\frac{v_s}{v_0}} + \sigma_{xz}^{n,i,j,k-\frac{v_s}{v_0}})/2 \quad (3.99)$$

$$\sigma_{xx}^{Z,i,j,k} = \sigma_{xx}^{n,i,j,k} + q(\sigma_{zz}^{Z,i,j,k} - \sigma_{zz}^{n,i,j,k}) \quad (3.100)$$

$$\sigma_{yy}^{Z,i,j,k} = \sigma_{yy}^{n,i,j,k} + q(\sigma_{zz}^{Z,i,j,k} - \sigma_{zz}^{n,i,j,k}) \quad (3.101)$$

$$\sigma_{xy}^{Z,i,j,k} = \sigma_{xy}^{n,i,j,k} \quad (3.102)$$

Les expressions ci-dessus font intervenir les valeurs "causales" en $(n, i, j, k + \frac{v_p}{v_0})$, $(n, i, j, k - \frac{v_p}{v_0})$, $(n, i, j, k + \frac{v_s}{v_0})$ et $(n, i, j, k - \frac{v_s}{v_0})$. Ces valeurs sont estimées par interpolation linéaire en espace avec les valeurs sur la grille en $(n, i, j, k+1)$, (n, i, j, k) et $(n, i, j, k-1)$. De la même manière on définit les opérateurs X et Y. Il faut souligner que X, Y et Z ne commutent pas. Le calcul complet consiste donc à faire les six combinaisons d'opérations XYZ, YXZ, ZXY, ZYX, XZY et YZX et à en prendre la moyenne.

Transmission de la condition limite venant de la faille. Vis à vis du schéma de directions alternées, il suffit de faire entrer la dislocation sur la faille comme une condition limite en vitesse pour définir l'opérateur FZ au lieu de Z. Les opérateurs X et Y ne sont pas concernés. Ici nous écrivons l'expression de FZ pour le calcul des points à droite près de la faille en $k = 1$. Les droites de causalité et les points nécessaires au calcul sont tracés

sur la figure 3.13 à droite. Les équations (3.94) à (3.99) sont remplacées par:

$$v_z^{FZ,i,j,1} = \frac{1}{2z_p^+} (z_p^+ v_z^{n,i,j,1+\frac{v_p^+}{v_0}} + z_p^- v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,-1}) \quad (3.103)$$

$$+ (z_p^+ v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^+} - z_p^- v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^-}) + \sigma_{zz}^{n,i,j,1+\frac{v_p^+}{v_0}} - \sigma_{zz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,-1}) \quad (3.104)$$

$$- (z_p^+ v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^+} - z_p^- v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^-}) + \sigma_{zz}^{n,i,j,1+\frac{v_p^+}{v_0}} + \sigma_{zz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,-1}) \quad (3.105)$$

$$v_y^{FZ,i,j,1} = \frac{1}{2z_s^+} (z_s^+ v_y^{n,i,j,1+\frac{v_s^+}{v_0}} + z_s^- v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,-1}) \quad (3.106)$$

$$+ (z_s^+ v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} - z_s^- v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-}) + \sigma_{yz}^{n,i,j,1+\frac{v_s^+}{v_0}} - \sigma_{yz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,-1}) \quad (3.107)$$

$$- (z_s^+ v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} - z_s^- v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-}) + \sigma_{yz}^{n,i,j,1+\frac{v_s^+}{v_0}} + \sigma_{yz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,-1}) \quad (3.108)$$

$$- (z_s^+ v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} - z_s^- v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-}) + \sigma_{xz}^{n,i,j,1+\frac{v_s^+}{v_0}} - \sigma_{xz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,-1}) \quad (3.109)$$

Dans (3.103) à (3.108), les valeurs en $(n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,-1)$ et $(n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,-1)$ sont interpolées en temps par les valeurs qui les encadrent en $k = -1$. Les valeurs en $(n,i,j,1+\frac{v_s^+}{v_0})$ et $(n,i,j,1+\frac{v_p^+}{v_0})$ sont interpolées en espace avec les valeurs en $(n,i,j,1)$ et $(n,i,j,2)$. Enfin les valeurs en $(n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^\pm)$ et $(n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^\pm)$ sont directement prises depuis le calcul progressif des dislocations sur la faille. En effet, pendant le calcul progressif sur la faille, on repère et on garde en mémoire ces points. Pour le calcul des points à gauche près de la faille en $k = -1$. Les équations (3.94) à (3.99)

sont remplacées par

$$v_z^{FZ,i,j,-1} = \frac{1}{2z_p^-} (z_p^- v_z^{n,i,j,-1-\frac{v_p^-}{v_0}} + z_p^+ v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,1}) \quad (3.109)$$

$$- z_p^+ v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^+} + z_p^- v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^-} - \sigma_{zz}^{n,i,j,-1-\frac{v_p^-}{v_0}} + \sigma_{zz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,1}) \quad (3.110)$$

$$\sigma_{zz}^{FZ,i,j,-1} = \frac{1}{2} (-z_p^- v_z^{n,i,j,-1-\frac{v_p^-}{v_0}} + z_p^+ v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,1}) \quad (3.111)$$

$$- z_p^+ v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^+} + z_p^- v_z^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+},i,j,0^-} + \sigma_{zz}^{n,i,j,-1-\frac{v_p^-}{v_0}} + \sigma_{zz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_p^+}-\frac{v_0}{2v_p^-},i,j,1}) \quad (3.112)$$

$$v_y^{FZ,i,j,-1} = \frac{1}{2z_s^-} (z_s^- v_y^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + z_s^+ v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.113)$$

$$- z_s^+ v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} + z_s^- v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-} - \sigma_{yz}^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + \sigma_{yz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.114)$$

$$\sigma_{yz}^{FZ,i,j,-1} = \frac{1}{2} (-z_s^- v_y^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + z_s^+ v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.115)$$

$$- z_s^+ v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} + z_s^- v_y^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-} + \sigma_{yz}^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + \sigma_{yz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.116)$$

$$v_x^{FZ,i,j,-1} = \frac{1}{2z_s^-} (z_s^- v_x^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + z_s^+ v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.117)$$

$$- z_s^+ v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} + z_s^- v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-} - \sigma_{xz}^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + \sigma_{xz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.118)$$

$$\sigma_{xz}^{FZ,i,j,-1} = \frac{1}{2} (-z_s^- v_x^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + z_s^+ v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.119)$$

$$- z_s^+ v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^+} + z_s^- v_x^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+},i,j,0^-} + \sigma_{xz}^{n,i,j,-1-\frac{v_s^-}{v_0}} + \sigma_{xz}^{n+1-\frac{v_0}{2v_s^+}-\frac{v_0}{2v_s^-},i,j,1}) \quad (3.120)$$

Dans (3.109) à (3.114) on procède de la même manière pour les interpolations.

Les autres conditions limites autour du modèle peuvent être choisies parmi les trois types suivants: contrainte constante, vitesse constante ou absorbante. Pour les conditions absorbantes nous utilisons la condition paraxiale classique que nous implémentons simplement dans les opérateurs X,Y et Z.

Convergence. Les résultats de convergence ont été présentés dans le cas antiplan par Ionescu & Campillo (1999) (voir figure 3.14). Dans les problèmes plans et tridimensionnels, les principales vérifications sont contenues dans les comparaisons avec les solutions analytiques concernant l'initiation. En initiation rapide, la convergence est excellente pour tous les schémas bidimensionnels. Elle est plus difficilement vérifiable en trois dimensions du fait de la taille en mémoire. Cependant, on constate un très bon accord pour le problème d'initiation infinie tridimensionnelle. En initiation lente, sur des failles finies proches de la stabilité (lorsque $\lambda_0/(v_s \alpha_c) < 0.1$), tous les schémas de différences finies convergent plus difficilement. Ceci est normal puisqu'on demande au système d'évoluer dans une dynamique qui ne correspond plus du tout à celle d'un schéma de propagation des ondes explicite comme c'est le cas ici. On constate aussi qu'en dessous et proche du point critique de stabilité $\zeta < \approx \zeta_0$, le glissement ne s'arrête pas toujours naturellement. Cependant, l'introduction d'une restauration partielle du frottement, après l'arrêt occasionnel du glissement, stoppe ce dernier dans ces cas théoriquement stables. Cette restauration étant très faible, elle ne joue plus aucun rôle dans le domaine instable lorsqu'on s'éloigne du point critique. Une différence significative survient dans le schéma

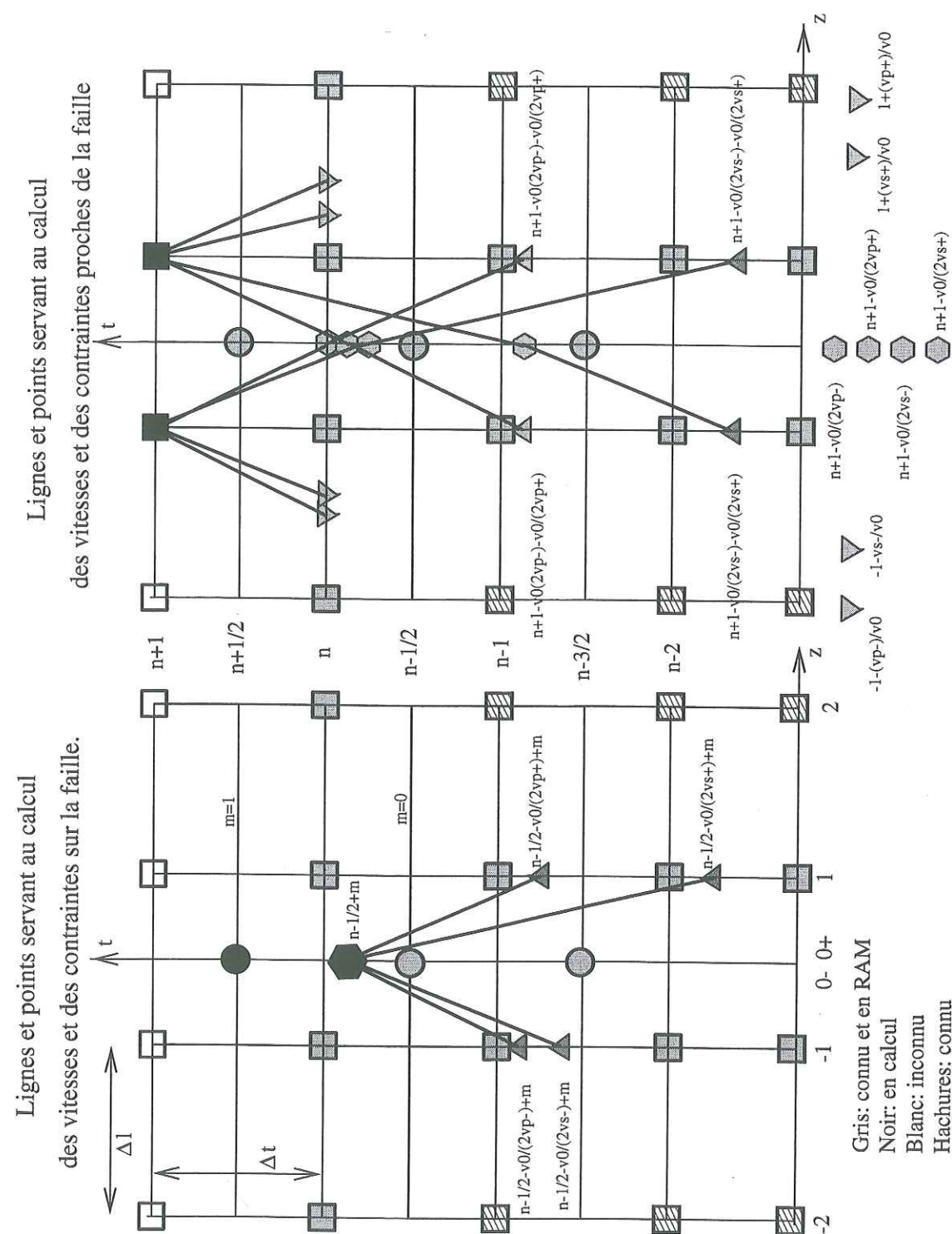


FIG. 3.13 – Représentation de la grille et des lignes caractéristiques dans le plan (t, z) près de la faille.

tridimensionnel dans ces mêmes conditions: le glissement sur la faille évolue en moyenne correctement mais il ne se stabilise pas localement près de la barrière, en cas de singularité. Ce problème peut-être évité en délocalisant la loi de frottement sur les points adjacents. Cette manipulation ne change ni les résultats en initiation tridimensionnelle assez rapide, ni les résultats en initiation bidimensionnelle lente et rapide. Pour conclure, les schémas de différences finies proposés sont capables de reproduire très fidèlement les processus d'initiation hétérogène ou non linéaire à condition que l'évolution soit significativement dynamique ($\lambda_0/(v_s \alpha_c) > 0.1$). En d'autres termes on ne peut pas simuler de processus d'initiation confiné dans une faille finie tel que sa valeur propre en temps soit inférieure à un dixième de celle du problème infini correspondant. Cela se ramène aussi à dire que la dynamique de l'initiation doit être suffisante pour que le nombre d'aller-retours de l'onde de la perturbation initiale dans la faille finie, ayant lieu avant de voir apparaître l'instabilité selon la première fonction propre, ne doit pas être trop grand (10 au maximum). En conséquence, on ne peut prendre l'instabilité naturelle qu'en cours de route. Pour simuler les processus très lents on doit faire appel à d'autres méthodes comme la méthode spectrale en éléments finis utilisée par Nguyen (1998) et Voisin et al. (2000).

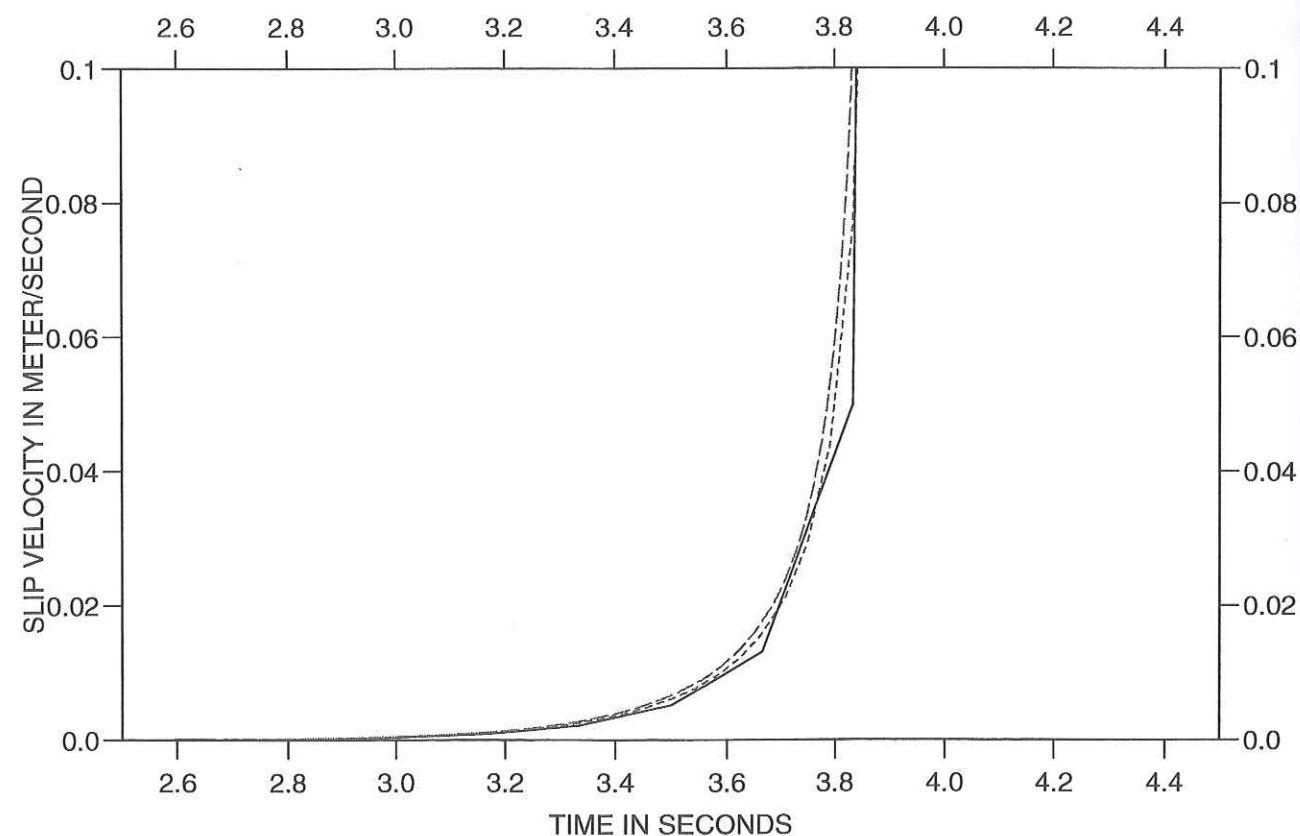


FIG. 3.14 – Le test de convergence effectué par Ionescu & Campillo (1999) pour différentes discrétisations. Ici, il s'agit de la vitesse de glissement au centre d'une faille finie, dans le problème de l'initiation antiplane.

3.2 Modèles réalistes et implications pour l'observation.

3.2.1 Modèles simples. Observations globales. Sismogrammes synthétiques de phase d'initiation.

Dans cette section, nous exposons les résultats de simulations numériques prospectives, susceptibles de s'approcher de problèmes réels et d'inspirer des méthodes d'observation des failles actives. La géométrie est celle d'un décrochement sur une faille verticale en $z = 0$ avec la surface libre en $y = 0$. La direction du glissement (ou strike) est suivant x , la profondeur est suivant $y < 0$ et la distance d'éloignement de la faille est suivant z (cf. figure 3.15). Le corps élastique a les propriétés suivantes: $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333.33 \text{ m s}^{-1}$, $v_p = \sqrt{3}v_s$.

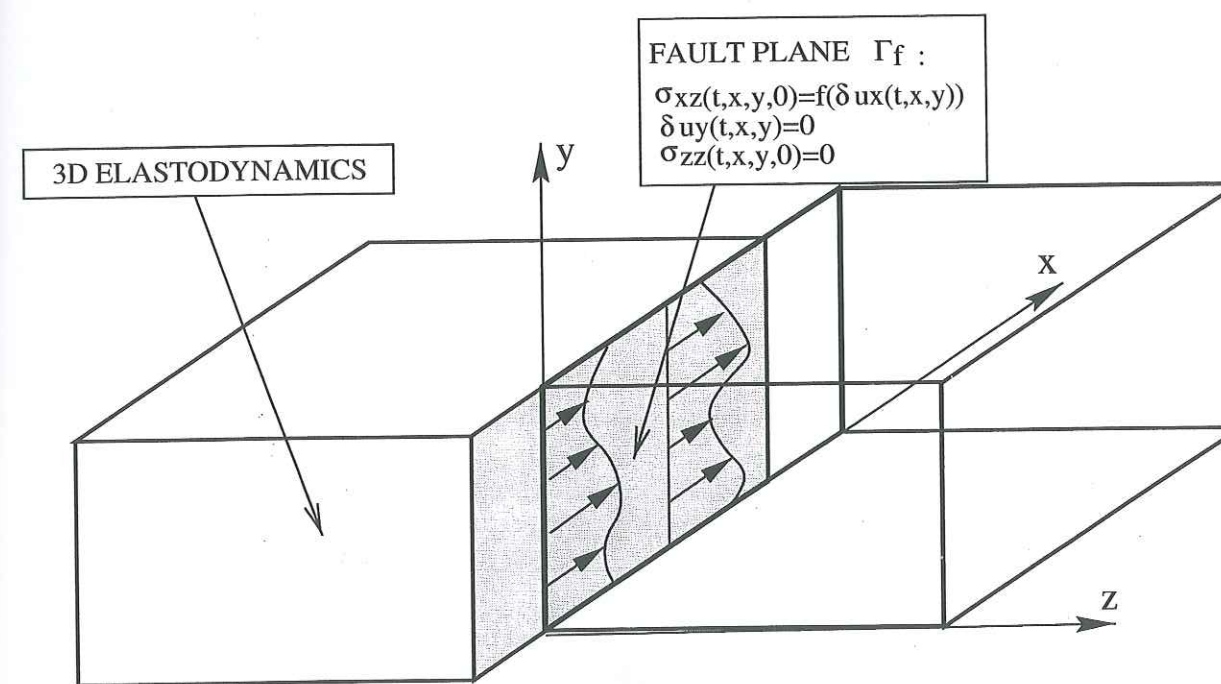


FIG. 3.15 – La géométrie du strike-slip vertical.

Nous considérons l'initiation tridimensionnelle confinée sur une petite zone de taille finie appelée "patch". Nous utilisons la loi de frottement en glissement avec affaiblissement linéaire dont la chute de résistance vaut $\sigma_s - \sigma_d = 10 \text{ MPa}$. À l'intérieur du "patch", la contrainte est au niveau du seuil de frottement statique et à l'extérieur, le glissement est bloqué. Le patch a la forme de la faille finie C3DFF définie auparavant. Ses rayons valent 2.66 km suivant x et 2 km suivant y . Le centre du patch est à trois profondeurs 0 km , 6 km et 12 km . Pour chaque profondeur nous prenons deux types de patch. Dans le premier type $L_c = 0.3 \text{ m}$. Cette valeur est proche de celles obtenues à partir d'observations sismologiques. Pour ce type de patch $\alpha_c = 0.001 \text{ m}^{-1}$, $\zeta = 1.27$ et $\lambda_0 \approx 0.9 \text{ s}^{-1}$. On est proche de la stabilité et l'initiation est considérée comme lente ("patch lent"). Dans le second type $L_c = 0.075 \text{ m}$. Cette valeur se rapproche plus de celles obtenues en laboratoire dans certaines expériences de frottement. Ici $\alpha_c = 0.004 \text{ m}^{-1}$, $\zeta = 5.093$ et $\lambda_0 \approx 12 \text{ s}^{-1}$. On est loin de la stabilité et l'initiation est considérée comme rapide ("patch rapide"). L'histoire du glissement est tracée dans chacun des cas sur la figure 3.16.

Dans cette étude, il est à noter que le crack ne se propage pas au delà du patch et donc pas au delà de la zone initiée. Il est intéressant de noter le rapport d'échelle de

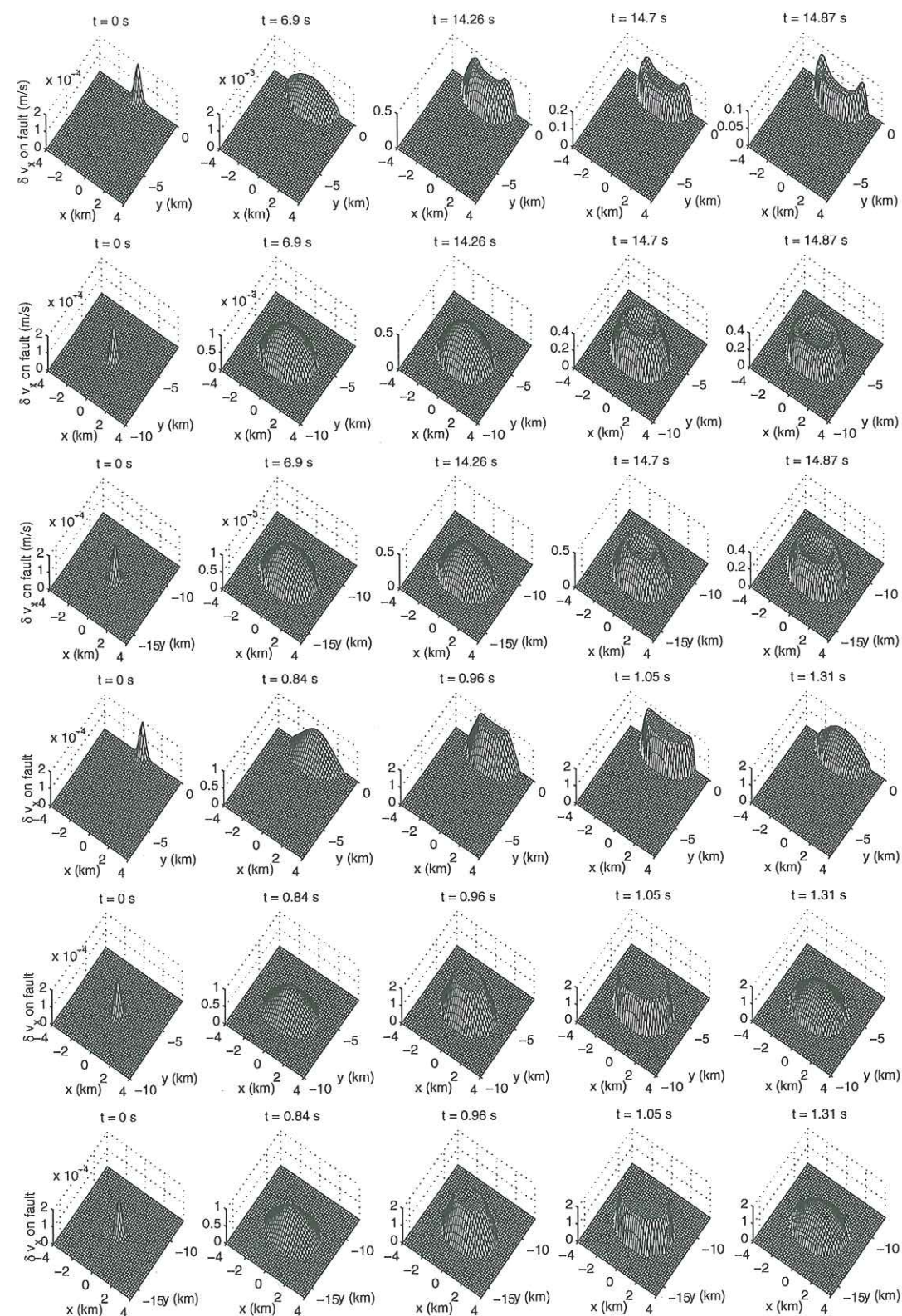


FIG. 3.16 – Histoire du glissement sur un “patch” de type C3DFF de rayon caractéristique 2 km et situé à différentes profondeurs (0 km, 6 km et 12 km). Pour les trois premières, le patch est proche de la stabilité et l’initiation est lente (“patch lent”). Pour les trois dernières le patch est loin de la stabilité et l’initiation est rapide (“patch rapide”).

moment libéré pendant l’initiation et l’évènement complet. On note m_i et M_i le moment et la magnitude d’initiation et m_0 et M_0 le moment et la magnitude de l’évènement. Enfin on note T_c le temps d’initiation.

Evènement	m_i (Nm)	M_i	T_c	m_0 (Nm)	M_0	m_0/m_i
0km rapide	6.4510^{15}	4.48	0.89s	9.4910^{16}	5.26	14.7
6km rapide	1.4210^{16}	4.70	0.90s	1.7510^{17}	5.44	12.3
12km rapide	1.4210^{16}	4.70	0.90s	1.7510^{17}	5.44	12.3
0km lent	4.8010^{16}	5.06	13.95s	7.7110^{16}	5.20	1.8
6km lent	8.8110^{16}	5.23	14.35s	1.4210^{17}	5.38	1.61
12km lent	8.9310^{16}	5.24	14.42s	1.4210^{17}	5.38	1.59

D’après le tableau ci-dessus, on peut noter que le rapport de moment minimal $1.6 < m_0/m_i < 1.8$ est obtenu pour des patches où tout le crack s’est initié de manière lente. Un rapport presque dix fois plus grand $12.3 < m_0/m_i < 14.7$ est obtenu pour les patches où tout le crack s’est initié de manière rapide. On peut évoquer quelques raisons. En initiation rapide le glissement est plus localisé sur le plan de faille et le moment d’initiation est faible. Ensuite le front de rupture est étroit, se propage efficacement, et la rupture ne s’arrête qu’après le passage des ondes d’arrêt. En initiation lente le glissement occupe toute la zone faible et le moment d’initiation est grand. Par la suite le front de rupture est trop large pour qu’il se propage vraiment et la vitesse de glissement s’effondre rapidement. Remarquons que si la phase d’initiation, telle que nous la décrivons, correspond physiquement (de près ou de loin) à la phase de nucléation sismique rapportée par Ellsworth & Beroza (1995) alors les rapports m_0/m_i que nous obtenons sont beaucoup plus grands que ceux obtenus par Beroza & Ellsworth (1996), qui sont de l’ordre de 1%. Donc le modèle que nous proposons n’est pas le plus réaliste possible. Cependant, nous pouvons soit affirmer que le modèle d’initiation rapide (voire encore plus rapide) est plus réaliste, soit que la rupture s’étend ensuite hors de la zone d’initiation, ce qui est plus raisonnable compte tenu des observations sismologiques de la vitesse de rupture. Malgré cet écart avec la réalité, tout ceci nous permet de donner un repère quantitatif pour ces cas extrêmes. Il est certain que d’autres cas sont à étudier. Enfin tout cela ne gêne en rien la suite de l’analyse qui se concentre presque exclusivement sur la phase d’initiation.

Observations globales. A partir des expériences définies précédemment, nous allons commenter les observations en surface. Pour cela, nous représentons un certain nombre de quantités physiques. Pour se repérer nous représentons la vitesse de dislocation sur la faille. En surface, nous représentons des quantités cinématiques directement accessibles à l’expérimentation sismologique: les trois composantes de la vitesse de déplacement, les déformations volumique et cisailante. Nous représentons aussi deux autres quantités qui nécessitent un calcul: l’affaiblissement effectif et l’exposant effectif. Ces quantités ne sont calculées que pour un déplacement u_x suffisant (seuil de détection). L’affaiblissement effectif est défini par (3.115):

$$H \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t}(t, x, 0, z) \right) \text{ si } |u_x(t, x, 0, z)| < 10^{-9} m \quad (3.115)$$

L’exposant effectif est défini par (3.116):

$$H \left(Re \left(\frac{\partial \ln(v_x)}{\partial t}(t, x, 0, z) \right) \right) \text{ si } |u_x(t, x, 0, z)| < 10^{-9} m \quad (3.116)$$

H désigne la fonction saut et Re la partie réelle. Grâce à cette définition, on obtient des valeurs ayant un sens physique.

Commentons maintenant les figures concernant les patchs lents 3.17, 3.18 et 3.19. Dans la simulation du patch lent à 0 km (figure 3.17) on voit nettement la distinction entre la phase d'initiation et la phase propagative. La phase d'initiation se caractérise par des images stables: le mouvement est synchrone. Les ordres de grandeur associés aux vitesses de déplacement et aux déformations sont accessibles précocement aux appareils de mesure disponibles actuellement. L'affaiblissement effectif est une caractérisation invariante en temps de la fonction propre qui gouverne le déplacement dans le milieu élastique. Tout près de la faille qui débouche en surface (figure 3.17), l'affaiblissement effectif a la valeur correspondant à l'affaiblissement réel de la loi de frottement. L'exposant effectif est une autre caractérisation invariante en temps et en espace du processus d'initiation: c'est la première valeur propre. Ces deux caractérisations idéales seraient difficiles à obtenir dans la réalité, cependant elles sont typiques. Bien que peu évidente a priori, l'idée de les représenter provient de l'analyse spectrale. Les images qui leur correspondent sont détruites au moment où le régime de crack commence. En considérant maintenant les simulations des patchs lents à 6 km et 12 km (figures 3.18 et 3.19), on remarque que l'apparition d'images nettes est retardée, du fait que l'information liée à l'initiation décroît exponentiellement avec la distance d'observation. Les lobes des quantités cinématiques à la surface s'étendent tout en perdant de l'amplitude par rapport au patch positionné en surface (0 km). Pour le patch en profondeur à 12 km les grandeurs ne sortiraient du bruit de fond micro sismique que localement et qu'environ 5 secondes avant la rupture.

Passons maintenant aux figures concernant les patchs rapides 3.20, 3.21 et 3.22. Pour la faille en surface à 0 km (figure 3.20), les images stables de l'initiation ne sont visibles qu'au deuxième temps. Les amplitudes détectables pendant cette phase sont localisées près de la faille. En effet l'affaiblissement étant plus fort, l'amplitude du glissement est très évanescence. Sur les images de l'affaiblissement effectif et de l'exposant effectif, pour lesquelles le seuil de mesure en déplacement a été fixé à 1 nano mètre, il est très intéressant de noter que la zone cohérente forme un anneau. Cet anneau n'est pas vraiment la signature d'un processus d'initiation synchrone bien établi mais plutôt celle du front de rupture ou s'effectue l'affaiblissement (la "breakdown zone"). Les images des patch rapides en profondeur à 6 km et 12 km (figures 3.21 et 3.22) montrent que les vitesses et les déformations peuvent effectuer un saut final de trois ordres de grandeurs en 0.5s. En conclusion de ce paragraphe, la signature du processus d'initiation rapide ($\zeta \gg 1.2$) a le double inconvénient de durer peu de temps et d'être localisée. Ainsi, du point de vue observationnel, elle ne peut pas être séparée du phénomène de propagation de la rupture et ne peut pas servir de précurseur. Inversement, la signature du processus d'initiation lente a une grande durée et elle est moins localisée. Dans les cas naturels on peut penser qu'un patch d'initiation instable commence par une évolution proche de la stabilité. Ainsi ses caractéristiques sont intrinsèquement favorables à une détection au début. Cependant il a une faible amplitude puisqu'il se produit au début du glissement (quelques micro mètres de déplacement sur la faille). Ensuite on peut supposer que l'affaiblissement augmente progressivement avec le déplacement (par exemple pour des raisons de comportement physique à petite échelle), ce qui localise le champ de déplacement autour du patch et accélère le processus de surcroît. Au pire, on peut craindre que la loi de frottement est telle que le processus suive préféablement "le chemin de la discrétion maximale". La dernière remarque concerne la taille des modèles utilisés. Ici la magnitude de l'initiation est de l'ordre de 5. Si on considère un patch 10 fois plus petit avec la même chute de contrainte et dans les mêmes conditions d'instabilité, la magnitude de l'initiation sera de l'ordre de 3. Le temps d'initiation sera divisé par 10. Enfin les amplitudes des vitesses de déplacement

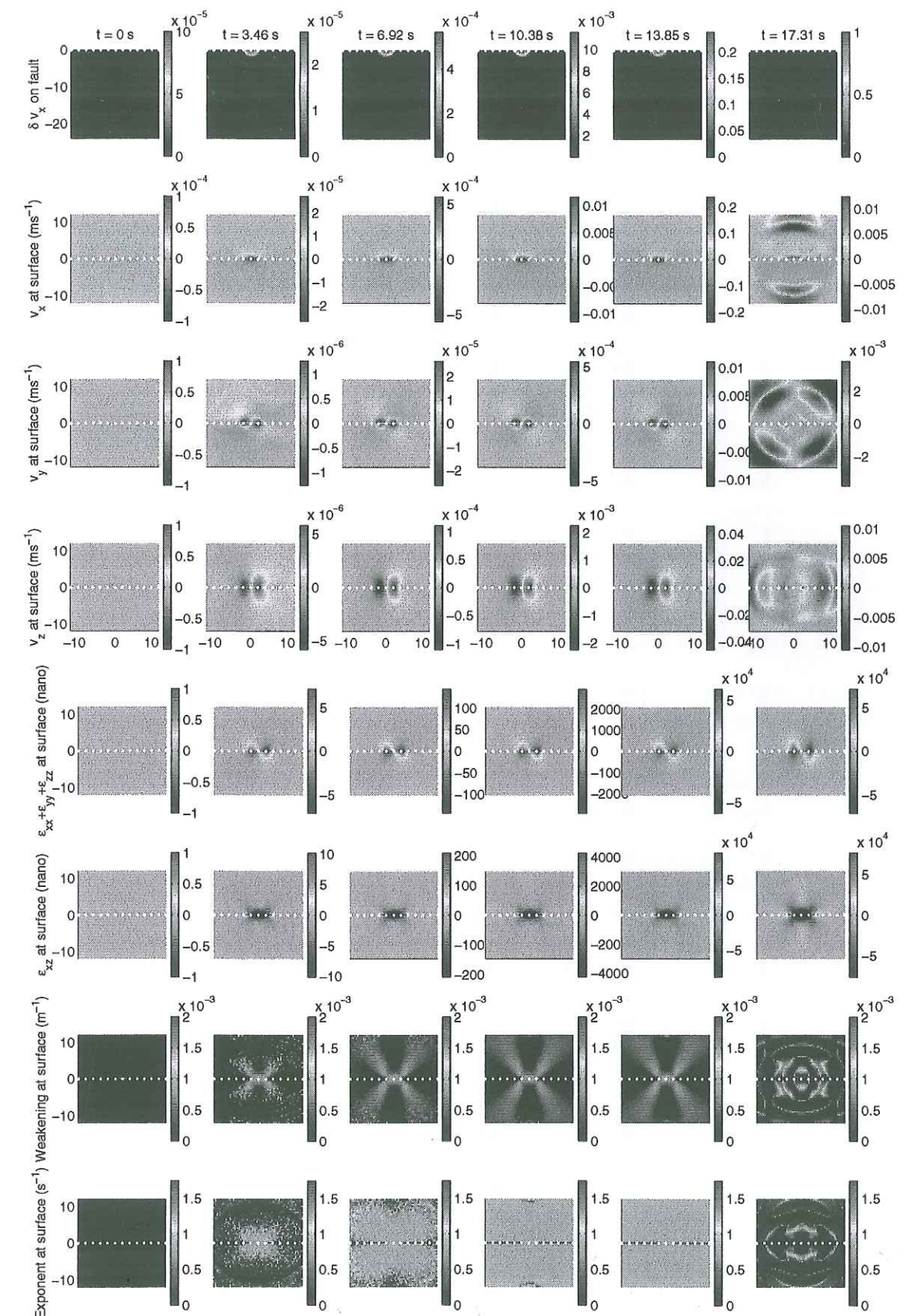


FIG. 3.17 – Cinématique en surface pour le patch lent à 0 km de profondeur. Première ligne: la demi-vitesse de glissement sur la faille. Puis de haut en bas la cinématique en surface: les trois composantes de la vitesse, les déformations volumique et cisailante et enfin l'affaiblissement effectif et l'exposant effectif.

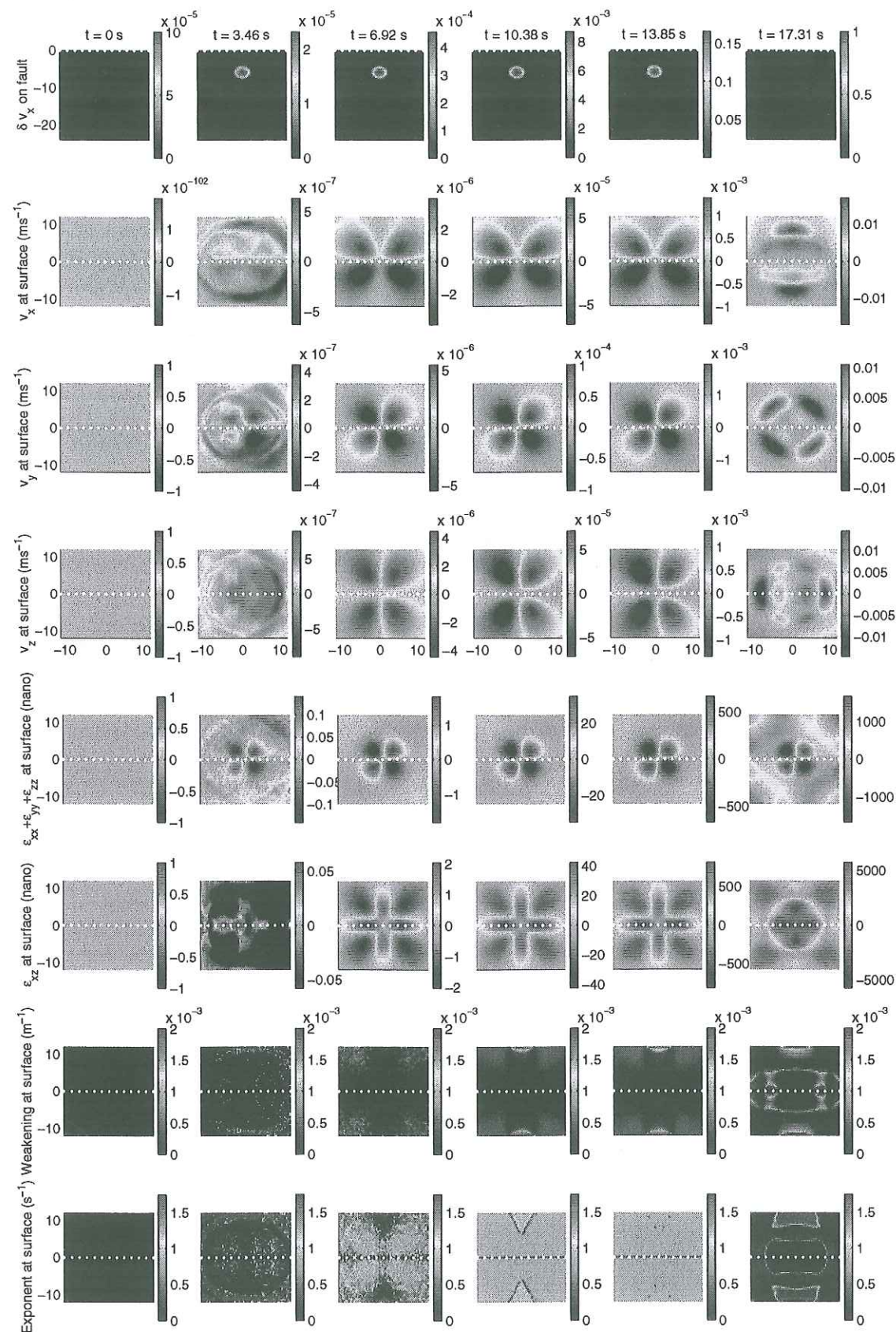


FIG. 3.18 – Cinématique en surface pour le patch lent à 6 km de profondeur. Première ligne: la demi-vitesse de glissement sur la faille. Puis de haut en bas la cinématique en surface: les trois composantes de la vitesse, les déformations volumique et cisailante et enfin l'affaiblissement effectif et l'exposant effectif.

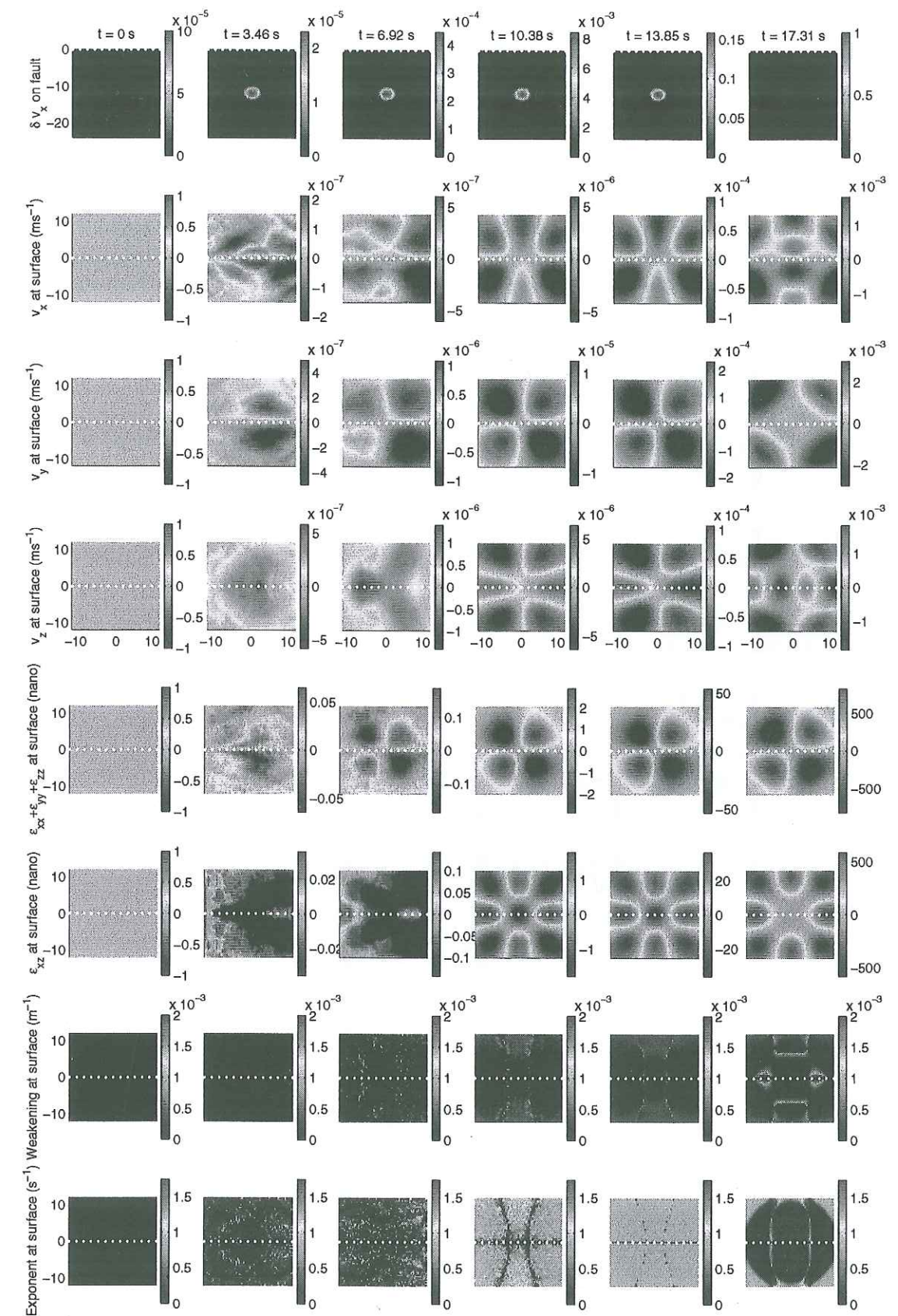


FIG. 3.19 – Cinématique en surface pour le patch lent à 12 km de profondeur. Première ligne: la demi-vitesse de glissement sur la faille. Puis de haut en bas la cinématique en surface: les trois composantes de la vitesse, les déformations volumique et cisailante et enfin l'affaiblissement effectif et l'exposant effectif.

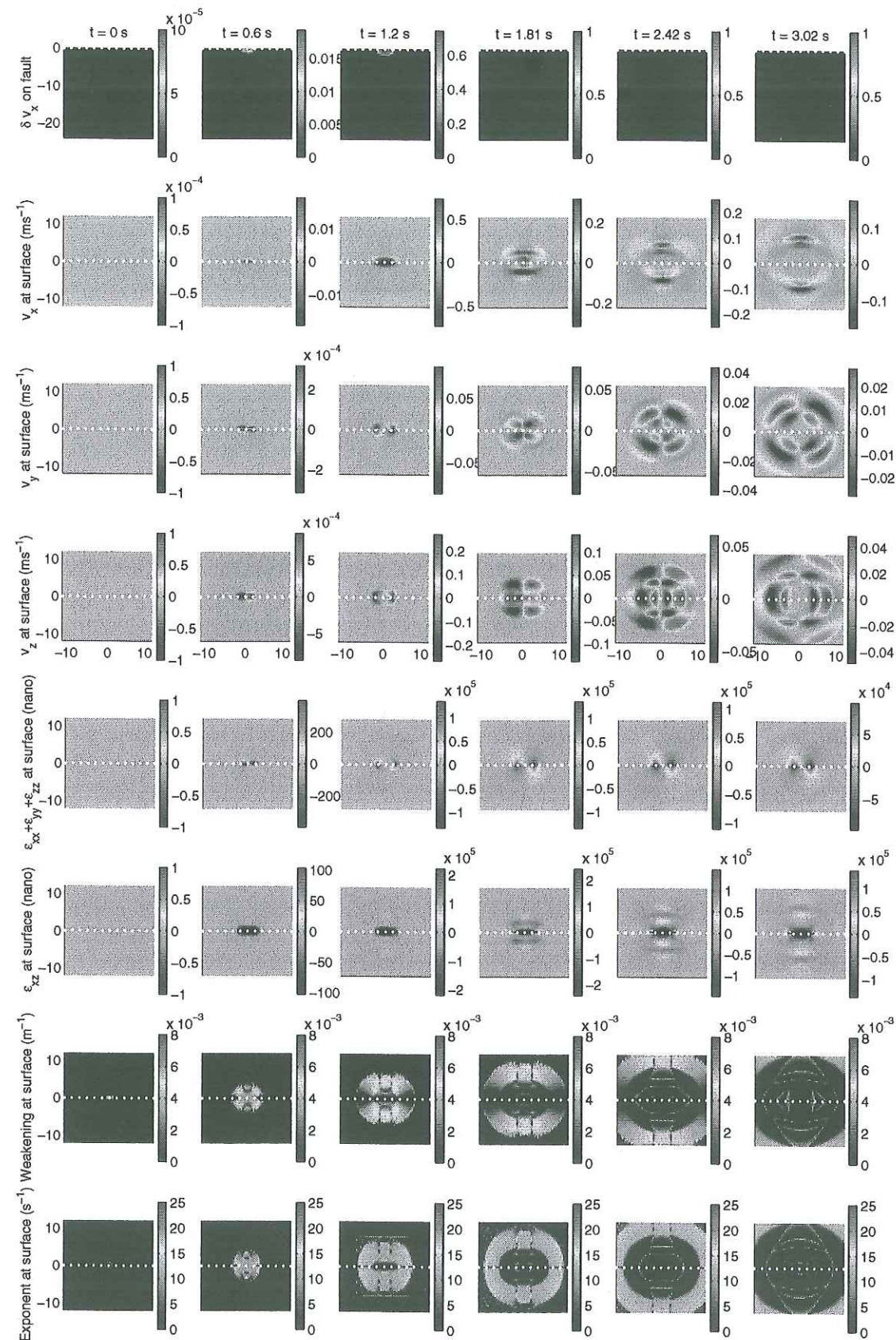


FIG. 3.20 – Cinématique en surface pour le patch rapide à 0 km de profondeur. Première ligne: la demi-vitesse de glissement sur la faille. Puis de haut en bas la cinématique en surface: les trois composantes de la vitesse, les déformations volumique et cisailante, enfin l'affaiblissement effectif et l'exposant effectif.

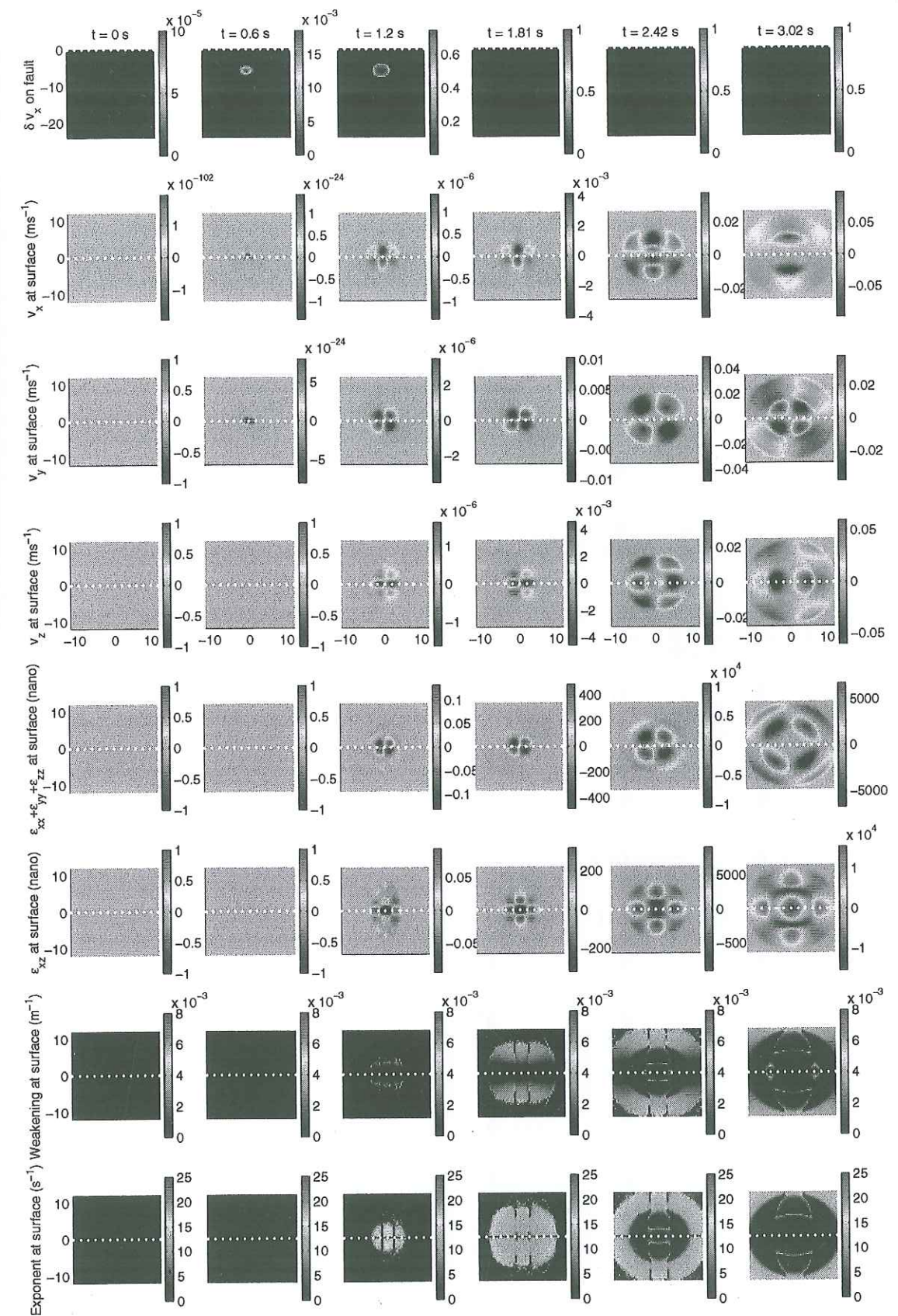


FIG. 3.21 – Cinématique en surface pour le patch rapide à 6 km de profondeur. Première ligne: la demi-vitesse de glissement sur la faille. Puis de haut en bas la cinématique en surface: les trois composantes de la vitesse, les déformations volumique et cisailante, enfin l'affaiblissement effectif et l'exposant effectif.

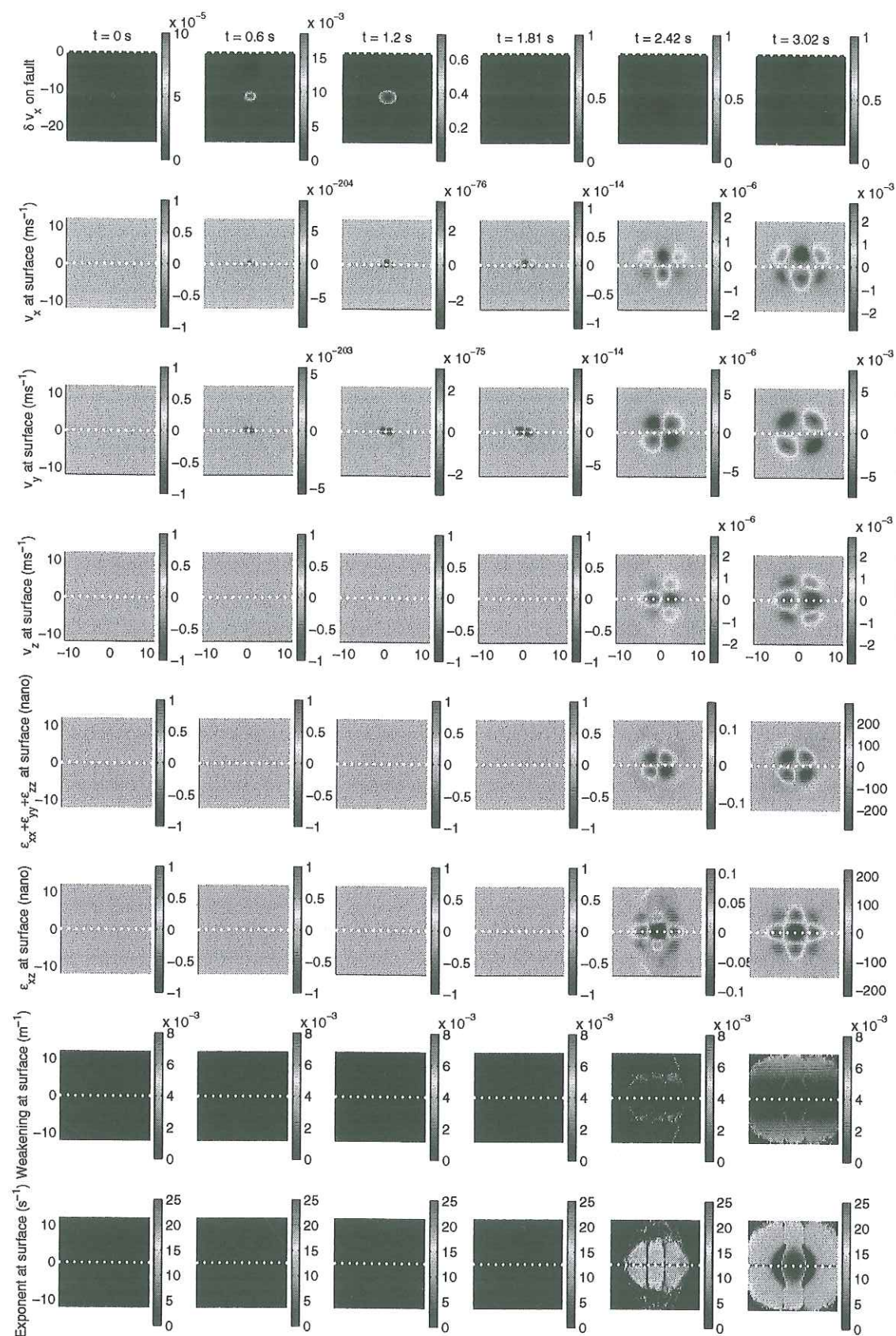


FIG. 3.22 – Cinématique en surface pour le patch rapide à 12 km de profondeur. Première ligne: la demi-vitesse de glissement sur la faille. Puis de haut en bas la cinématique en surface: les trois composantes de la vitesse, les déformations volumique et cisailante, enfin l'affaiblissement effectif et l'exposant effectif.

et des déformations observées aux mêmes distances que dans les expériences précédentes seront divisées par plusieurs ordres de grandeurs. Dans ces conditions la phase d'initiation est inobservable. En conclusion, il faut des situations assez exceptionnelles pour espérer l'identifier en tant que précurseur de la radiation sismique. Cette conclusion doit être tempérée car on peut espérer un développement technologique: avec des nappes de capteurs performants, il sera peut-être possible d'extraire du bruit le mouvement synchrone, caractéristique du processus d'initiation.

Sismogrammes synthétiques de phase d'initiation. Pour compléter l'étude précédente, nous présentons quelques sismogrammes synthétiques d'initiation à partir des cas d'étude précédents. Dans un premier temps nous testons les aptitudes du code de différences finies à calculer ces sismogrammes. Pour cela nous injectons la cinématique de la source obtenue par les différences finies dans le code de propagation des ondes en fréquence "axitra" (auteur: O. Coutant). Pour des raisons de temps de calcul, nous moyennons sur 107 sources au lieu des 1721 points sources en différences finies et nous reprenons les fonctions sources correspondantes. Le signal est reproduit avec 512 fréquences. La méthode en fréquence utilisée ne convergeant pas pour des sources situées en surface, nous ne simulons que les deux événements à 6 km et 12 km de profondeur. Une comparaison globale des signaux est présentée sur les figures 3.23, 3.24, 3.25 et 3.26. L'accord est bon surtout pour les premières arrivées. Les pics d'amplitude sont un peu lissés en différences finies puisque les hautes fréquences ne sont pas bien reproduites. Toujours en différences finies, la fin du signal est perturbée par des oscillations résiduelles dans tous les signaux. Bien qu'ayant des bords absorbants, ces oscillations qui correspondent aux bornes du modèle ne sont pas complètement évitées.

Maintenant, sur la figure 3.27, nous zoomons la comparaison sur le début du signal de la composante verticale. On choisit la trace située à $x = z = 6\text{ km}$. On peut constater que l'accord est vraiment bon quant à la progression du signal. Mais on peut aussi constater que la méthode en fréquence introduit des perturbations et des oscillations qui viennent de la recombinaison en fréquence. Cette méthode viole un peu la causalité et la forme d'onde. Or c'est justement ces dernières que l'on veut préserver. Ainsi, pour simuler des phases d'initiation, il vaut mieux utiliser les résultats des différences finies.

Sur la figure 3.28, nous présentons quelques signaux typiques obtenus en différences finies pour le patch situé à 12 km de profondeur. Nous représentons la composante de décrochement v_x , le long d'une ligne située en $z = 5.95\text{ km}$, en différentes positions x allant de $x = 0\text{ km}$ à $x = 12\text{ km}$, tous les 1 km. Dans les deux cas (rapide et lent), on observe comment le processus d'initiation détermine la montée du signal. La rapidité dépend directement du type de patch. On peut aussi noter deux types de forme d'onde avec ou sans pulse. Ceci est simplement dû aux deux types d'ondes. Dans les cas où x est grand, on se trouve dans une zone de radiation prépondérante des ondes P et l'initiation a lieu avant le pulse des ondes P. Dans les cas où x est proche de 0, on se trouve dans une zone de radiation nulle des ondes P. Dans ce cas, c'est le champ proche qui détermine la suite du signal. Pour finir, les signaux du patch rapide sont beaucoup plus ressemblants à des signaux sismologiques que ceux du patch lent, ce qui tend au moins à prouver qu'un séisme ne s'initie pas complètement tout en restant près du critère de stabilité.

Conclusion. Dans cette section, nous avons vu l'importance capitale de différencier les processus d'initiation proches de la stabilité et ceux qui en sont loin. Le critère stable/instable n'est pas un qualificatif suffisant pour comprendre l'initiation. Il faut y ajouter la notion de "plus ou moins instable" ou de "taux d'instabilité". Le modèle ci dessus suggère que nos instruments de mesure actuels ont seulement accès à l'initiation rapide

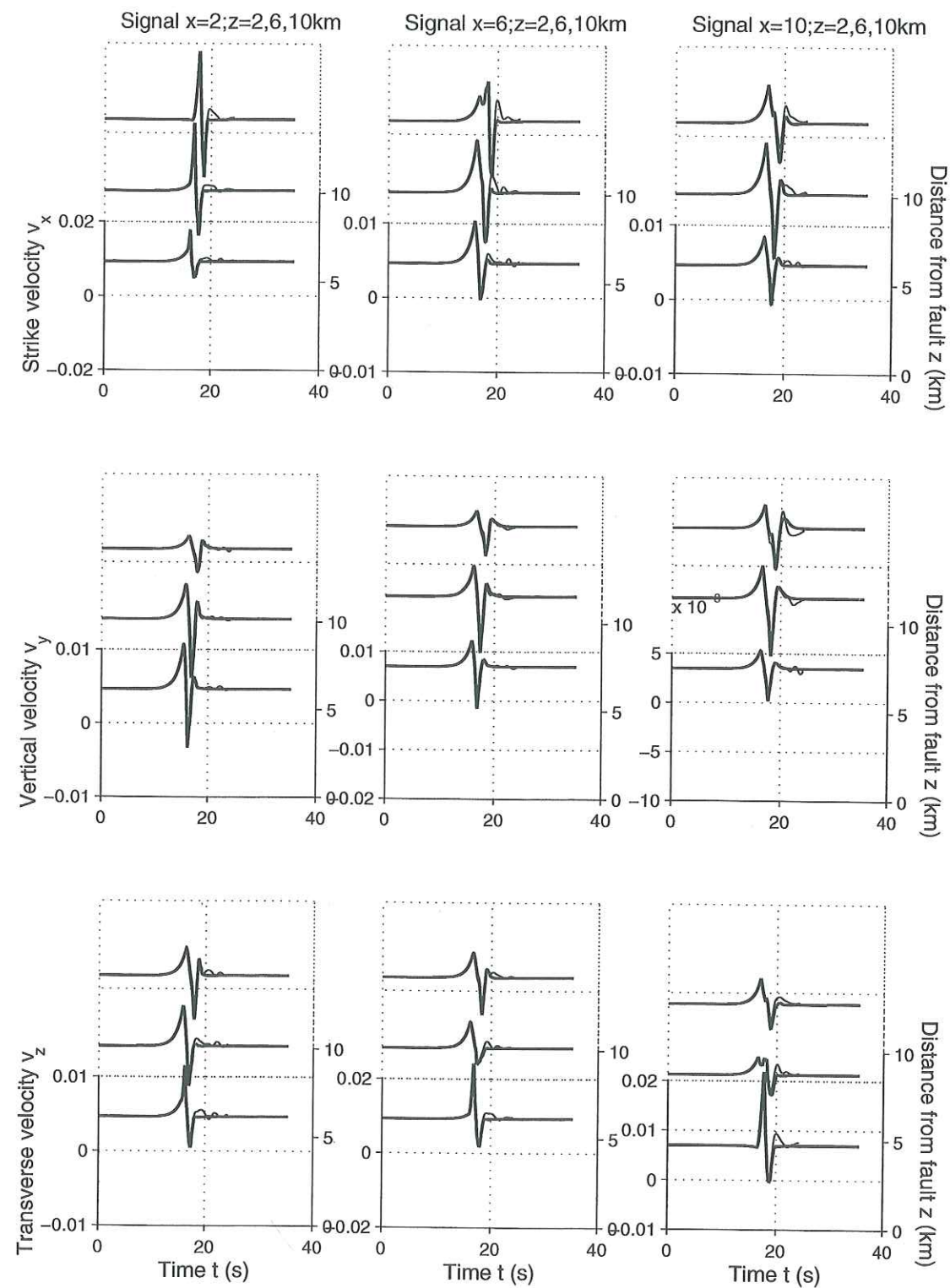


FIG. 3.23 – Comparaison globale entre les sismogrammes en différences finies et ceux recalculés par une méthode en fréquence. Cas du patch lent à 6 km de profondeur.

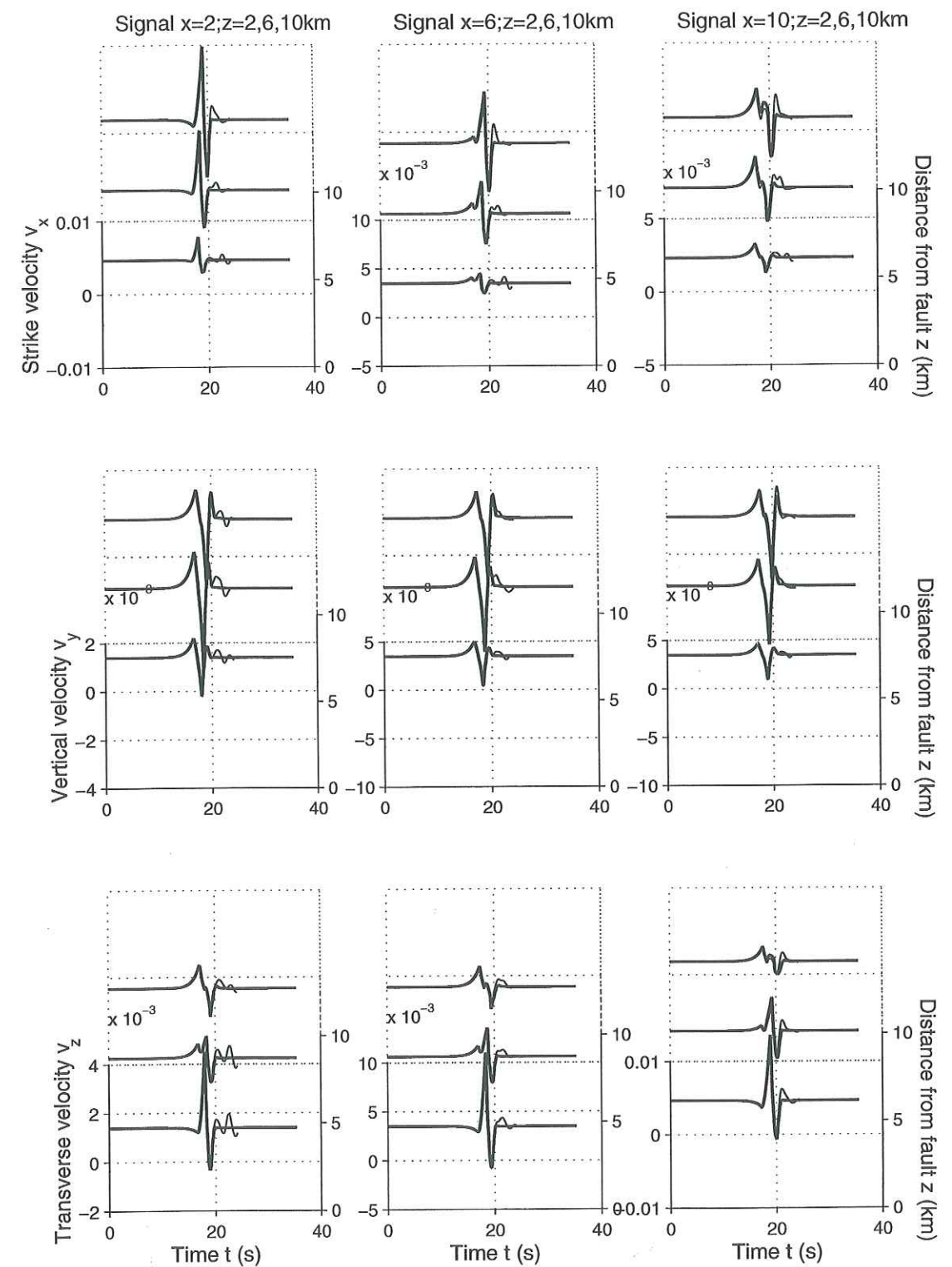


FIG. 3.24 – Comparaison globale entre les sismogrammes en différences finies et ceux recalculés par une méthode en fréquence. Cas du patch lent à 12 km de profondeur.

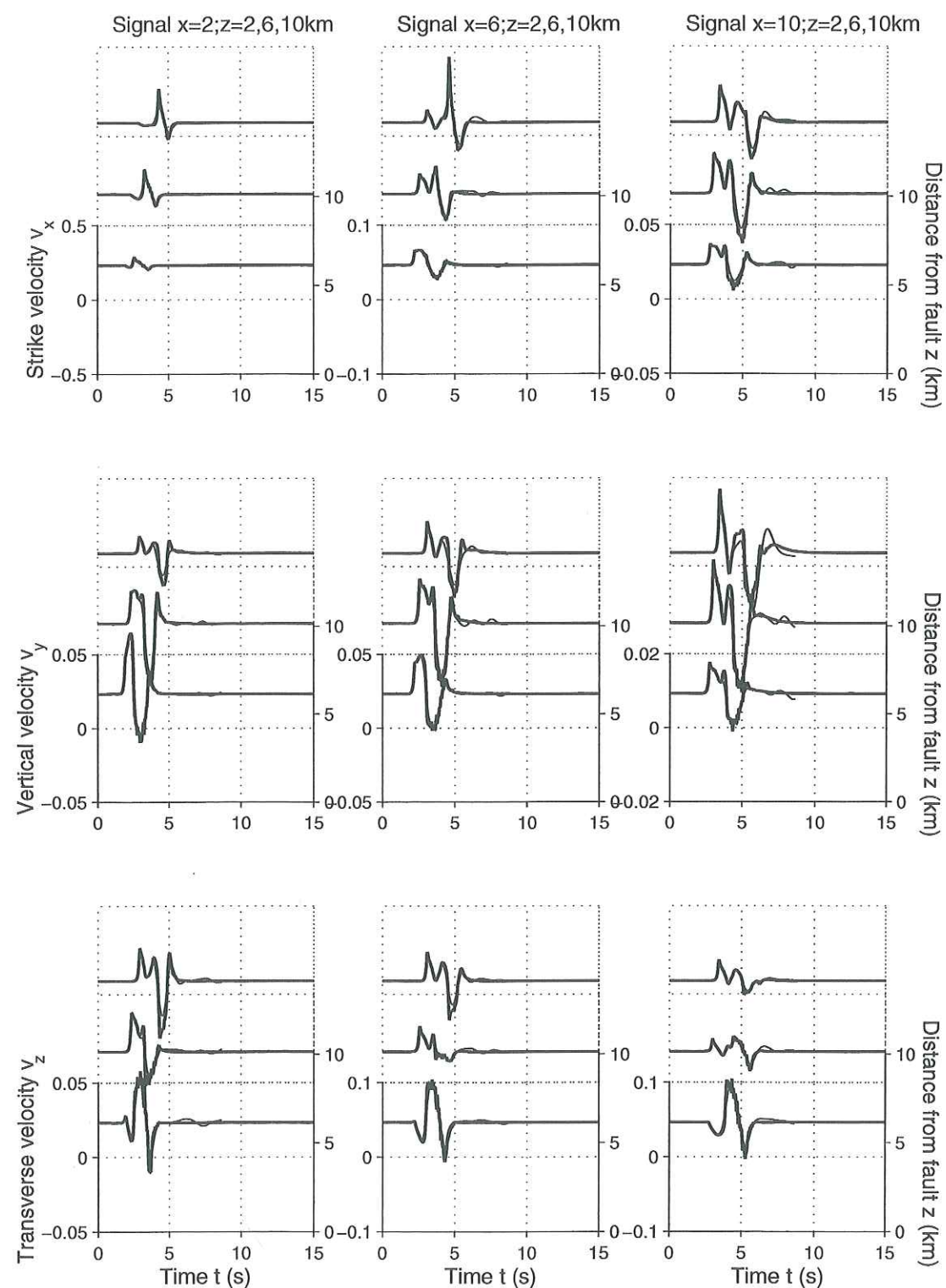


FIG. 3.25 — Comparaison globale entre les sismogrammes en différences finies et ceux recalculés par une méthode en fréquence. Cas du patch rapide à 6 km de profondeur.

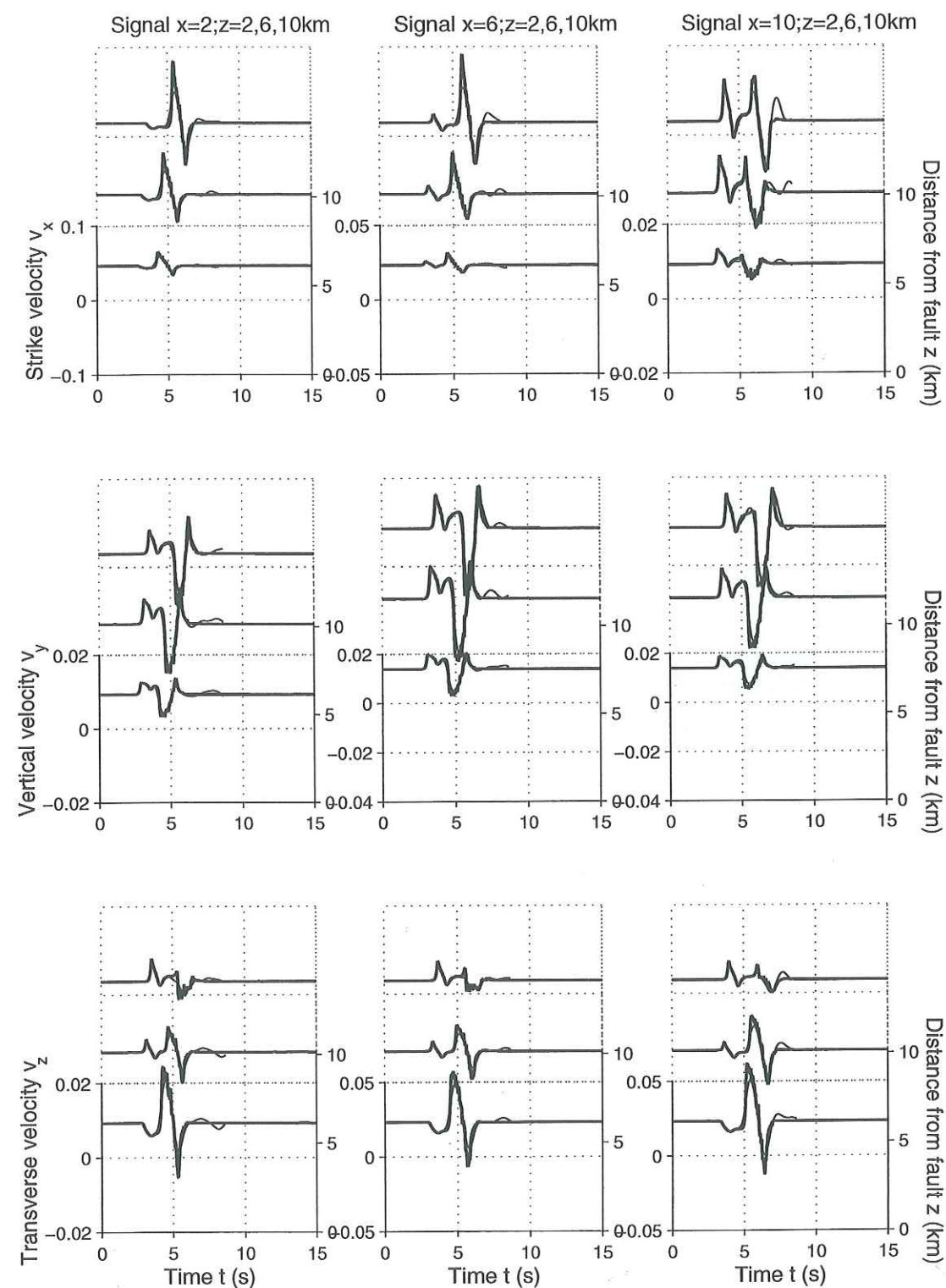


FIG. 3.26 — Comparaison globale entre les sismogrammes en différences finies et recalculés par une méthode en fréquence. Cas du patch rapide à 12 km de profondeur.

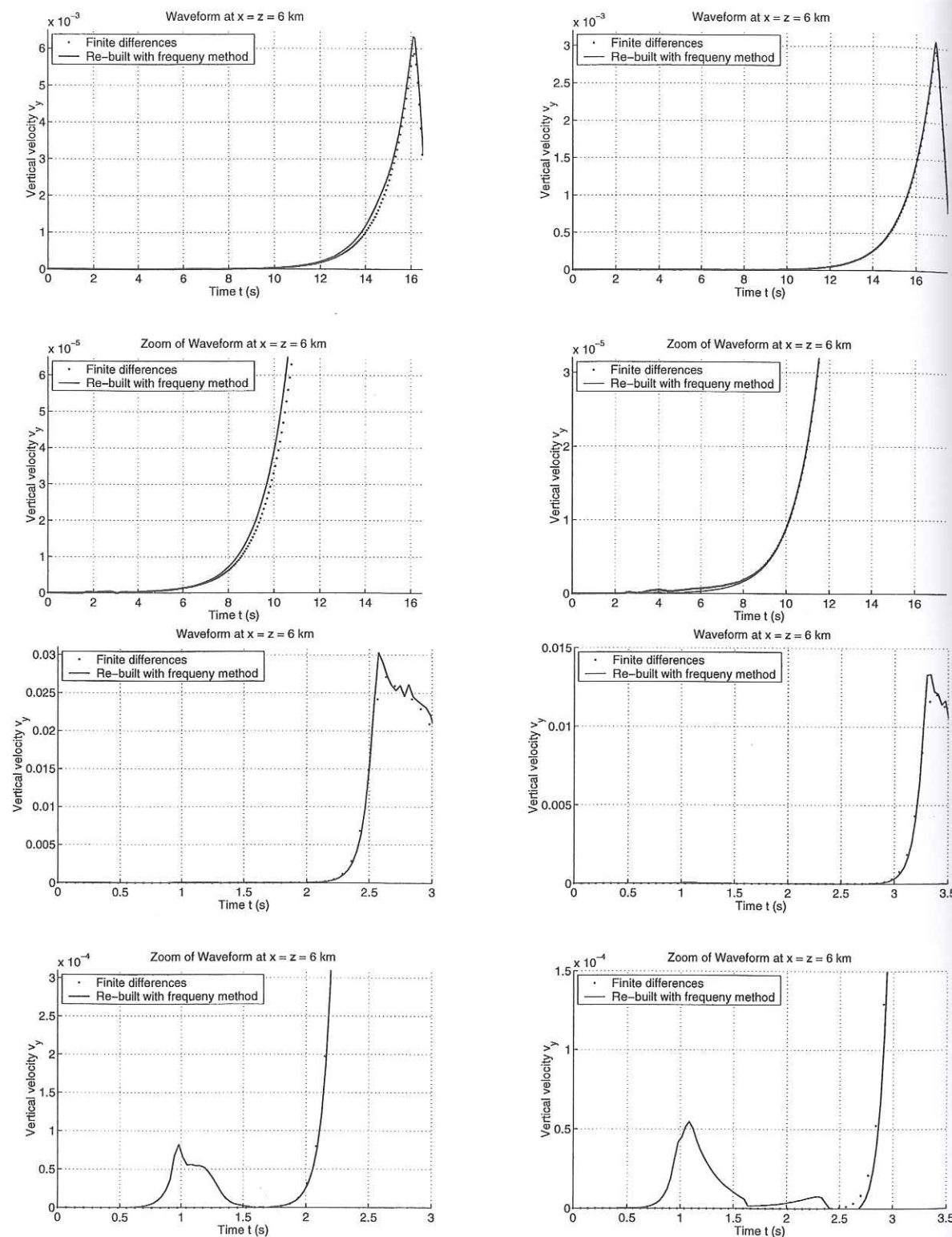


FIG. 3.27 – Comparaison de phases d'initiation en différences finies et recalculés par une méthode en fréquence. Les deux lignes du haut: les patchs lents. Les deux lignes du bas: les patchs rapides. A gauche: le patch à 6km de profondeur. A droite: le patch à 12km de profondeur.

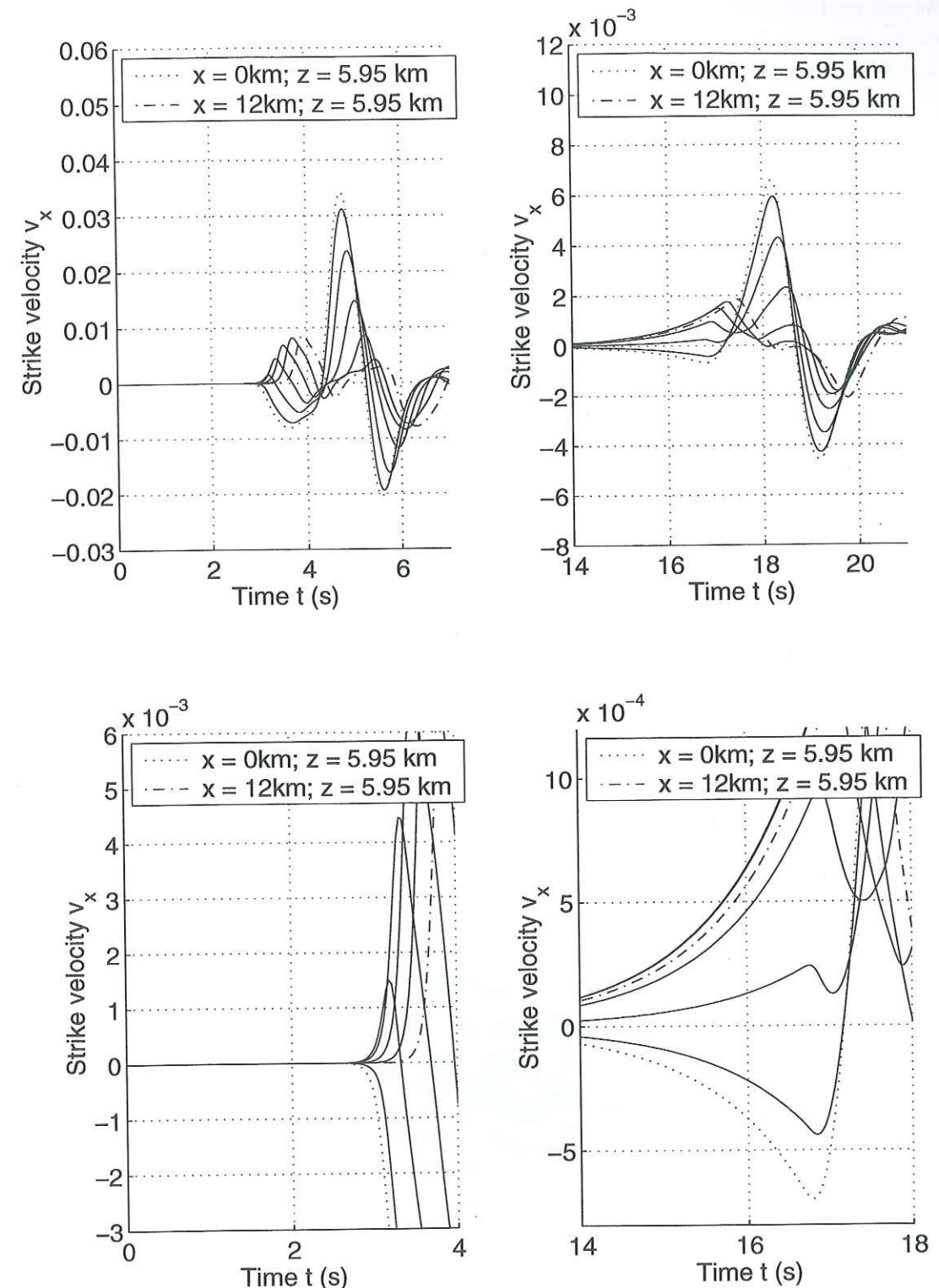


FIG. 3.28 – Quelques phases d'initiation typiques. A gauche: le patch rapide. A droite le patch lent. En haut: en pleine échelle. En bas: le zoom sur l'initiation. Dans les deux cas (rapide et lent), on observe que le processus d'initiation régularise la montée du signal. Dans les cas où x est grand, l'initiation a lieu avant le pulse des ondes P. Dans les cas où x est proche de 0, on se trouve dans une zone de radiation nulle pour le potentiel P. Dans ce cas c'est le champ proche qui produit la suite du signal.

ou même pas accès à l'initiation (le plus souvent). Ainsi, on peut proposer plusieurs modèles qui peuvent mieux coller à la réalité sismologique: le cas d'une loi de frottement non linéaire avec affaiblissement croissant, le cas d'une propagation de la rupture en dehors de la zone d'initiation. Les deux ont sans doute lieu à la fois.

3.2.2 Initiation sur une faille hétérogène.

Ici nous présentons un exemple de processus d'initiation hétérogène sur une faille dont la résistance est variable en tout point du plan de faille. Le milieu a les caractéristiques suivantes: $\rho = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_s = 3333.33 \text{ m s}^{-1}$, $v_p = \sqrt{3}v_s$. Le demi glissement critique est uniforme et vaut $L_c = 0.1 \text{ m}$ et la chute de contrainte vaut partout 10 MPa . Le surplus de résistance hétérogène, renormalisé par la chute de contrainte, est représenté sur la figure 3.29 en haut. Dans ce modèle il y a des zones au seuil de rupture prêtes à glisser de manière instable et d'autres encore bloquées par les barrières de résistance.

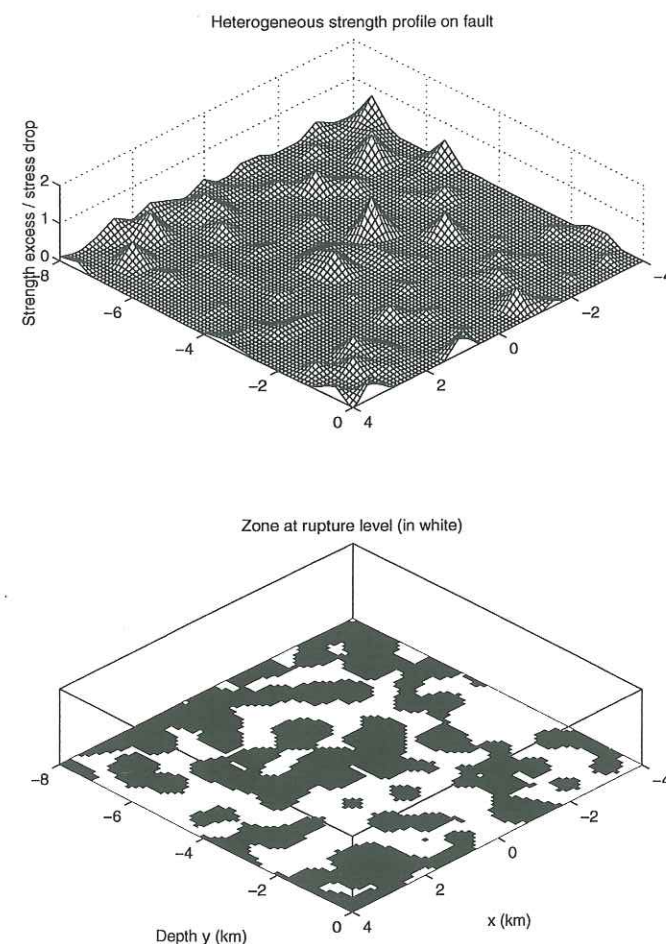


FIG. 3.29 – Le profil de surplus de résistance statique rapporté à la chute de contrainte. En haut: le profil. En bas: la zone d'initiation potentielle en blanc et les barrières en noir.

Quand on perturbe un tel système, la façon dont le glissement va se développer n'est pas intuitive. Cependant les paramètres ont été choisis après plusieurs essais par dichotomie pour que le système soit suffisamment peu instable au début. Sur les figures 3.30 et 3.31 on représente l'évolution de la vitesse de glissement et de la contrainte de cisaillement pendant les différentes phases du processus. Au début ($t < 2 \text{ s}$), la perturbation se propage. Ensuite ($2 \text{ s} < t < 5 \text{ s}$), le glissement commence à se développer sur une zone telle

que sa géométrie autorise une évolution instable, mais lente. La contrainte de cisaillement à ce moment n'est pas suffisante pour dépasser les barrières de résistance. Pour des temps supérieurs ($5 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$) les barrières commencent à s'éroder progressivement. On doit faire attention ici que les concentrations de contrainte générées dans ce modèle peuvent être localement fortes sur certaines barrières. Comme ce schéma numérique ne peut pas reproduire parfaitement ces concentrations, il faut admettre que ce mécanisme d'érosion à une dépendance, malgré tout modérée, avec la discrétisation. Sa régularisation n'a pas été envisagée dans ces travaux tridimensionnels parce qu'elle serait difficile à définir et très coûteuse numériquement. A $t = 6 \text{ s}$ on voit casser brutalement la petite zone encerclée dans le processus d'initiation. Ici le mécanisme responsable de cette cassure (et non érosion) est plus clair puisqu'il correspond à un encerclement et à un dépassement global de la résistance dans la zone encerclée. Alors que les concentrations de contrainte sont difficiles à simuler dans les zones encore résistantes, on peut penser que le relâchement collectif de la zone encerclée, (lorsque l'affaiblissement s'y généralise), est mieux reproduit numériquement. Ceci peut justifier une dépendance plus faible de ce mécanisme de cassure avec le maillage. Après cette cassure, le processus d'initiation croît beaucoup plus vite puisqu'il se développe dans une grande zone libre. Enfin pour des temps $t > 6.1 \text{ s}$ le crack démarre et la rupture s'étend jusqu'aux limites du modèle. On observe des pics dans le front de rupture lorsqu'il traverse des barrières.

Commentons maintenant l'information obtenue en surface. Sur la figure 3.32, on représente la vitesse verticale aux alentours de la faille. On installe aussi trois détecteurs S_0 , S_1 et S_2 pour lesquels on représente sur la figure 3.33 l'accélération verticale et l'exposant effectif (la dérivée temporelle du logarithme de la vitesse verticale). Sur la figure 3.32 on peut voir l'évolution du glissement sur la faille. Vers $t = 6 \text{ s}$, lors de la cassure de la barrière encerclée, on discerne un changement de forme qui correspond à un changement de fonction propre. Dans notre expérience, ce changement reste relativement faible. Toujours relié à la cassure de la zone encerclée, on voit sur la figure 3.33 des brisures de pente et de faibles ressauts sur les accélérations. Enfin seul l'exposant effectif permet de visualiser objectivement l'avancement du processus d'initiation. Au départ ($t < 2.8 \text{ s}$) il correspond au bruit de la perturbation. Ensuite il se stabilise sur une valeur qui correspond à l'initiation dans la zone initiale proche de la rupture. Par la suite ($4 \text{ s} < t < 6 \text{ s}$) l'exposant effectif augmente et oscille pendant le processus d'érosion des barrières. Malgré l'évolution du système, cet exposant effectif peut encore garder un sens physique puisqu'il reste presque le même sur les trois récepteurs. Pour $t > 6 \text{ s}$ il effectue un dernier saut qui correspond à la cassure de la barrière encerclée puis à la propagation du crack. Enfin, pendant le crack, il n'a plus de signification (sa valeur devient négative ou imaginaire). Cette expérience numérique montre qu'un processus d'initiation évolutif peut avoir lieu dans des milieux complexes hétérogènes. Le système passe par plusieurs états d'initiation de plus en plus instables avant la propagation de la rupture.

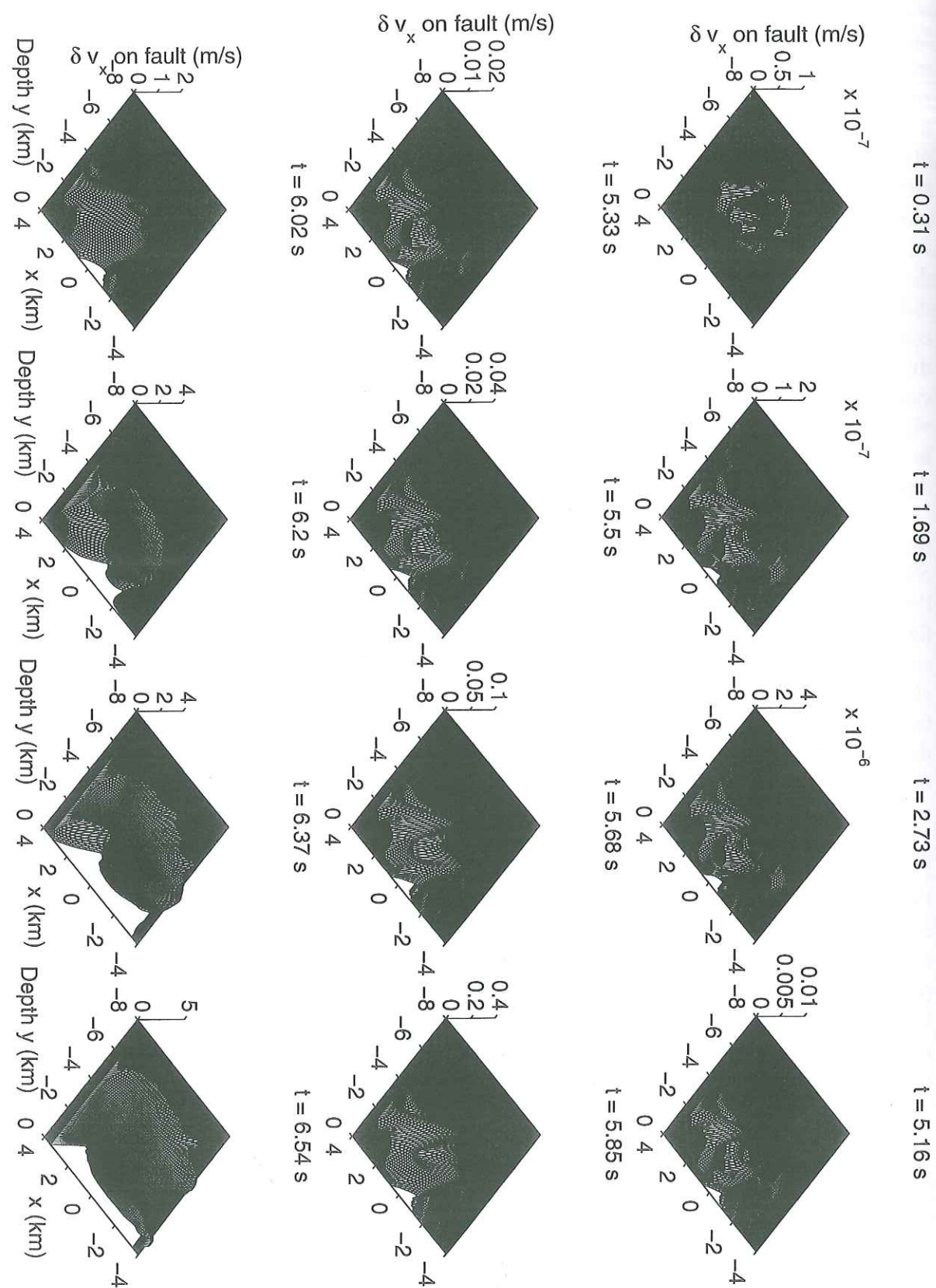


FIG. 3.30 - L'évolution de la vitesse de glissement sur la faille.

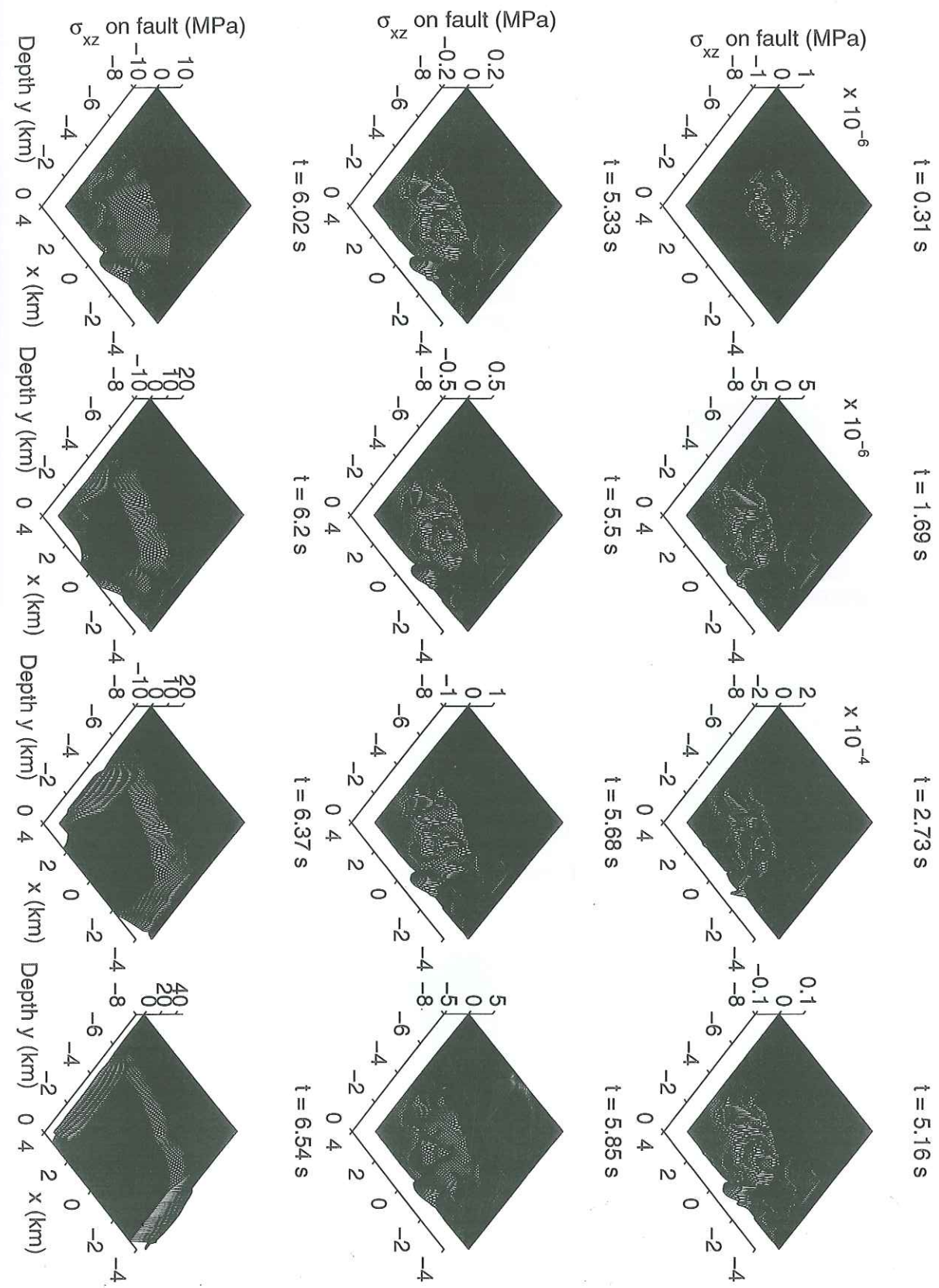


FIG. 3.31 - L'évolution de la contrainte sur la faille.

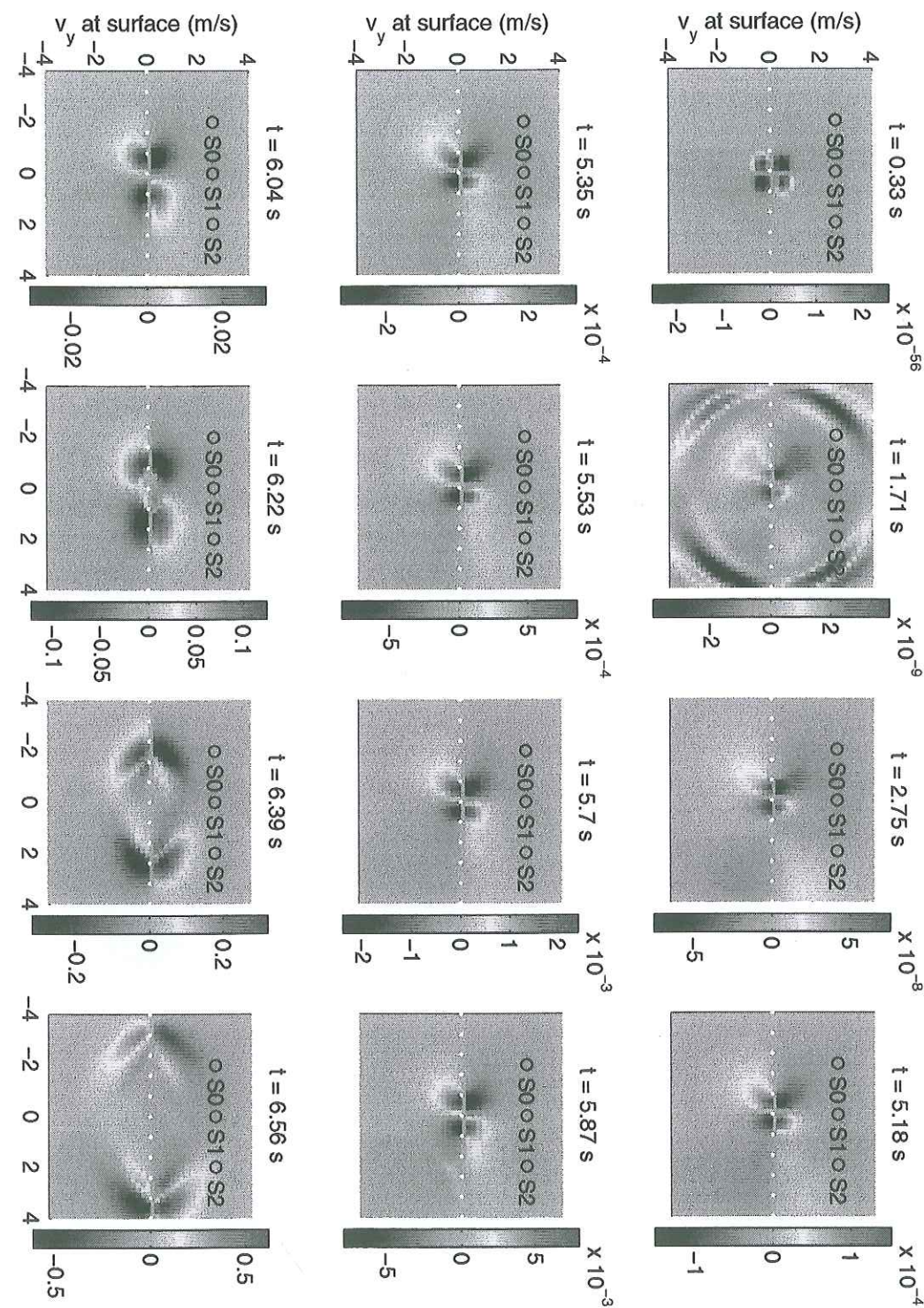


FIG. 3.32 – La vitesse verticale à la surface.

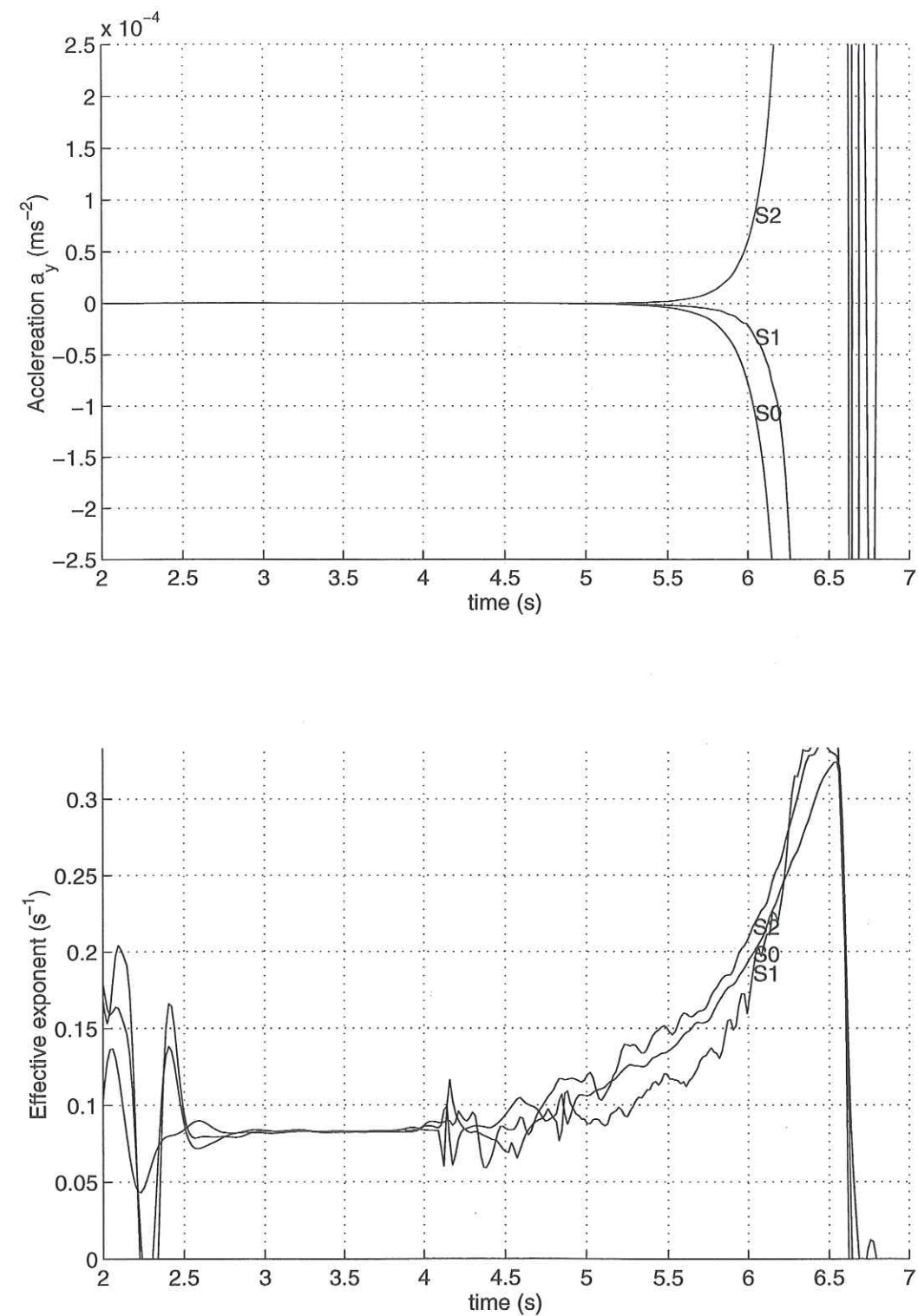


FIG. 3.33 – Les caractéristiques du signal en champ proche à la surface. En haut: l'accélération verticale sur trois récepteurs. On observe quelques irrégularités du signal (brisures de pente et ressauts). En bas: l'exposant effectif, la seule quantité capable de mesurer l'évolution du taux d'instabilité du processus d'initiation hétérogène.

Chapitre 4

LE CHANGEMENT D'ECHELLE.

Ici nous abordons les questions liées à l'hétérogénéité, au changement d'échelle, au comportement moyen et au frottement effectif dans le régime d'initiation d'un point de vue purement mécanique. Rappelons qu'il existe une différence énorme entre le glissement critique mesuré en laboratoire ($L_c \approx 10\mu m$) et celui qu'on trouve pour les séismes en mesurant l'énergie de fracturation ($L_c \approx 0.1m$). Les travaux expérimentaux de Ohnaka (1997) en conditions lithosphériques, sur un matériau intact, permettent de diminuer cet écart. Cependant il reste une différence notable de 1 à 2 ordres de grandeur. Dans la première section, nous étudions un processus d'initiation sur une faille antiplane de résistance variable avec des barrières périodiques (zones fortes et zones faibles). Sur chacune des zones, la loi de frottement est linéaire et l'affaiblissement est constant. Nous décrivons le comportement moyen du processus avec une loi de frottement homogène effective et non-linéaire (l'affaiblissement n'est pas constant). Le principal effet des hétérogénéités est d'augmenter considérablement le temps d'initiation. Grâce à une interprétation spectrale, nous traduisons cela par une diminution (tout aussi considérable) de "l'affaiblissement effectif" initial de la loi de frottement effective. Lorsque les barrières cassent, l'affaiblissement effectif augmente subitement et l'initiation devient rapide. Trois autres remarques importantes doivent être faites: 1) Le seuil de frottement statique effectif est celui des zones faibles et la notion de barrière de résistance statique devient caduque. 2) Le glissement critique n'est modifié que lorsque les barrières sont de grande amplitude. Dans ce cas, il se forme des cracks à l'intérieur des zones faibles et il n'y pas de phase d'initiation rapide. 3) Toujours dans ce cas, l'énergie de fracturation dans le modèle effectif est plus grande que celle dans le modèle initial hétérogène. On peut aussi retenir de cette étude que la loi de frottement est finalement un concept très relatif, lié au processus qui la fait s'exercer et lié à son échelle d'observation.

Dans la deuxième section nous présentons une tentative assez concluante de définition d'une loi de frottement effective en initiation tridimensionnelle. Bien que les conditions numériques ne soient pas idéales au niveau de la discrétisation, nous pensons pouvoir définir, selon les mêmes principes (spectraux) que précédemment, une loi de frottement effective qui simule un processus moyen en initiation tridimensionnelle hétérogène périodique.

Des développements supplémentaires sur des profils hétérogènes aléatoires seront nécessaires. Dans certains domaines (acoustique et optique), il est possible de définir des lois homogénéisées de diffusion globale dans les milieux aléatoires, alors que la loi de propagation locale est de nature hyperbolique. Notre processus étant instable et non-linéaire, il n'est pas évident de pouvoir transposer les méthodes utilisées ci-dessus à des hétérogénéités non périodiques. Cela reste une intéressante question.

4.1 Définition d'une loi de frottement effective.

On the Effective Friction law of an Heterogeneous Fault.

M. Campillo, P. Favreau, I.R. Ionescu and C. Voisin

Accepted in Journal of Geophysical Research.

Résumé. L'étude numérique du processus de rupture est habituellement conduite avec l'hypothèse d'invariance d'échelle du processus de frottement, alors que l'hétérogénéité des propriétés de la faille est montrée directement par les observations de la géométrie de la surface des cracks et aussi par les résultats d'inversion du glissement. Nous étudions la possibilité de définir une loi de frottement effective pour une faille avec des hétérogénéités de petite échelle, c'est à dire une distribution de petits segments ayant une résistance à la rupture plus forte que le niveau global. Nous considérons un modèle où la condition de bord locale correspond à une loi de frottement dépendant linéairement du glissement. Nous définissons la loi de frottement effective non linéaire par analogie avec la solution théorique spectrale de la phase d'initiation pour une faille infinie homogène. Nous utilisons des simulations en différences finies pour tester la validité de cette approche. Les résultats montrent un surprenant accord entre les résultats du modèle complètement hétérogène et celui de la faille homogène avec la loi de frottement effective. Le temps d'initiation et la vitesse de glissement moyenne sur la faille sont bien prédits par le modèle effectif. La loi de frottement effective exhibe une non linéarité avec un taux d'affaiblissement initial différent de celui des lois locales. Le taux d'affaiblissement initial dépend de la géométrie de l'hétérogénéité et peut être obtenu par une analyse de valeur propre. La loi effective montre un coude à une valeur de glissement qui correspond au glissement moyen sur la faille, lorsque la concentration de contrainte sur les segments forts est suffisamment large pour déclencher la rupture. Bien que basés sur un modèle relativement simple de faille, ces résultats indiquent qu'une loi de frottement effective peut être définie et utilisée à des fins pratiques. L'hétérogénéité de la faille tend à diminuer le taux d'affaiblissement initial par rapport à celui de la loi locale sur les zones faibles. Puisque le taux d'affaiblissement initial contrôle la durée de l'initiation, ce dernier point indique que la durée de l'initiation des failles, usuellement attendue, est plus grande que celle déduite des mesures de laboratoire à petite échelle. L'énergie de fracturation attendue n'est pas conservative dans la mise à l'échelle de la loi de frottement.

Abstract. The numerical simulation of rupture process is usually performed under an assumption of scale invariance of the friction process and yet, the heterogeneity of the fault properties is shown both by the direct observation of surface crack geometry and by the results of slip inversion. We investigate the possibility to define an effective friction law for a fault with a small scale heterogeneity, that is with a distribution of narrow segments with a resistance to rupture higher than the background. We consider a model where the local boundary condition corresponds to a linear slip dependent friction law. We define the effective slip dependent friction law by analogy with the theoretical spectral solution for the initiation phase in the case of an homogeneous infinite fault. We use finite difference simulation to test the validity of this approach. The results show a surprisingly good agreement between the results of the complete heterogeneous fault model and of an homogeneous fault with an effective friction law. The time of initiation and the average of the slip velocity on the fault are well predicted by the effective model. The effective

friction law exhibits a non-linear slip dependence with an initial weakening rate different from the one of the local laws. This initial weakening rate is related to the geometry of the heterogeneity and can be obtained by an eigenvalue analysis. The effective law shows a kink at a slip that corresponds to the average slip on fault for which the stress concentration of the strong segments is sufficient to trigger their rupture. While based on a rather simple model of fault, these results indicate that an effective friction can be defined and used for practical purposes. The heterogeneity of a fault tends to decrease the initial weakening rate with respect to the case of the local weak patches. Since the initial weakening rate controls the initiation duration, this last point indicates that the duration of initiation expected from actual heterogeneous faults is much larger than the one deduced from small scale laboratory measurements. The actual fracture energy is not conservative in the rescaling of the friction law.

Introduction Friction is a phenomenon that concerns both the microscopic and macroscopic scales. The origin of frictions has to be searched in the hard contacts between two rough surfaces. The phenomenon is observed in seismology at the scale of the seismic waves, that is kilometric. Hence, the fault heterogeneity described by the inversion of seismological data by Hartzell and Heaton (1983), Archuleta (1984) and Cotton & Campillo (1995) is also of kilometric scale. Smallest scales of heterogeneities cannot be obtained directly. Even the laboratory measurements (Dieterich (1979) and Ohnaka & Shen (1999)) do not represent the local boundary condition at the microscopic scale but the macroscopic frictional behavior of the elastic bodies in contact at the scale of the samples. The geometry of the contact, let say the roughness, has been shown to be a determinant parameter for the frictional behavior (Scholz (1990)). The contact can be modeled at different scales as a non linear process resulting in a friction law. Models of macroscopic slip dependent friction law have been set from the analysis of the microscopic physical behavior of a rough surface of contact (see Matsu'ura et al. (1992)). In the classical approach of the non-linear problem of slipping with weakening, the scale invariance is implicitly assumed as for the crack theory (Andrews (1976), Madariaga (1976) and Fukuyama & Madariaga (1998)). In these theories the same effective friction law is assumed for every time or space scale. The aim of this paper is to investigate this assumption using simple numerical experiments. We aim to check the assumption that it exists an equivalent macroscopic friction law for the problem of a fault with small scale heterogeneity of strength. By equivalent, we mean that this "macroscopic" effective law is sufficient to describe the global behavior of the fault.

Our analysis concerns primarily the initiation phase which is an unstable and highly dynamic stage. As a matter of fact, this stage of the rupture corresponds to the evolution of the friction from its static level to its dynamic value. It is therefore the best stage to describe the friction evolution. Indeed, the friction law governs also the rupture propagation and one of our objectives is to test the accuracy of an effective friction law in the description of the complete process. We performed numerical experiments based on a finite difference resolution of the anti-plane problem as described in Ionescu & Campillo (1999). The present paper concentrates on a single change of scale from the point of view of classical mechanics. We expect that this type of approach provides useful indications on the rules of scaling that can be included in more general conceptual models of earthquake behavior such as the ones based on simplified interaction between elementary patches (Burridge & Knopoff (1967) and Carlson & Langer (1989)) or on a hierarchical approach (Narteau et al. (2000)).

Heterogeneous and equivalent problems The macroscopic behavior of a fault with small scale heterogeneity of resistance is difficult to relate with the local properties of the fault. Indeed the non-linearity resulting from the progressive breaking of resistant barriers prevents from using directly simple homogenization technique. In addition, since the friction law appears as a local boundary condition, the local (microscopic) properties are kept fixed in the global process. A formal measure of the friction on the fault itself would just be a local particular law, that is varying with the position along the fault. All over this paper we focus on the following question: *How to obtain an effective (homogeneous, equivalent) friction law for the heterogeneous fault with an equivalent evolution of the slip?*

Let us give now the statement of the heterogeneous and equivalent problems. In what it follows we shall denote with the indexes h and e the fields, equations, laws, etc. attached to the heterogeneous and equivalent problem respectively. If no index is used it means that the field or equation is the same for both problems.

We consider the anti-plane shearing on a finite fault $y = 0$, $|x| < a$ of length $2a$, denoted by Γ_f , limited by unbreakable barriers, in an homogeneous linear elastic space. The contact on the fault is described by a slip dependent friction law. We assume that the displacement field is 0 in directions Ox and Oy and that u_z does not depend on z . The displacement is therefore denoted simply by $w(t, x, y)$. The elastic medium has the shear rigidity G , the density ρ and the shear velocity $c = \sqrt{G/\rho}$. The non-vanishing shear stress components are $\sigma_{zx} = \tau_x^\infty + G\partial_x w(t, x, y)$ and $\sigma_{zy} = \tau_y^\infty + G\partial_y w(t, x, y)$, and the normal stress on the fault plane is $\sigma_{yy} = -S$ ($S > 0$).

The equation of motion is

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x, y) = c^2 \nabla^2 w(t, x, y) \quad (4.1)$$

for $t > 0$ and (x, y) outside of the fault Γ_f .

Concerning the boundary conditions on Γ_f we have:

$$\sigma_{zy}(t, x, 0^+) = \sigma_{zy}(t, x, 0^-), \quad |x| < a, \quad (4.2)$$

and the friction law. For the heterogeneous problem slip dependent friction law reads:

$$\sigma_{zy}^h(t, x, 0) = \mu^h(x, \delta w^h(t, x))S, \quad |x| < a, \quad \partial_t \delta w^h(t, x) > 0, \quad (4.3)$$

$$\sigma_{zy}^h(t, x, 0) \leq \mu^h(x, \delta w^h(t, x))S, \quad |x| < a, \quad \partial_t \delta w^h(t, x) = 0, \quad (4.4)$$

where $\delta w^h(t, x) = \frac{1}{2}(w^h(t, x, 0^+) - w^h(t, x, 0^-))$ is the half of the relative slip and $\mu^h(\delta w)$ is the coefficient of friction on the heterogeneous fault which will be described below. We consider here a series of strong patches of width b_s which are evenly distributed on the fault (see Figure 4.1a). They form a surface of strong resistance Γ_f^s with a large static friction coefficient $\mu_s^s = \mu^h(x, 0)$ if $x \in \Gamma_f^s$. The other part of the fault, denoted Γ_f^w , has a weak static resistance $\mu_s^w = \mu^h(x, 0)$ if $x \in \Gamma_f^w$. It is composed of a series of weak patches of width b_w . We call $\delta\mu_s = \mu_s^s - \mu_s^w > 0$ the increase of static resistance on the barriers. Everywhere on the fault we assume a linear slip-weakening friction.

The dynamic friction μ_d and the critical slip L_c are assumed constant on the fault. In conclusion the heterogeneous friction coefficient $\mu^h(x, \delta)$ is a piecewise linear function illustrated in Figure 4.1b and given by:

$$\mu^h(x, \delta) = \mu_s^s - \frac{\mu_s^s - \mu_d}{L_c} \delta, \quad \delta \leq L_c, \quad x \in \Gamma_f^s,$$

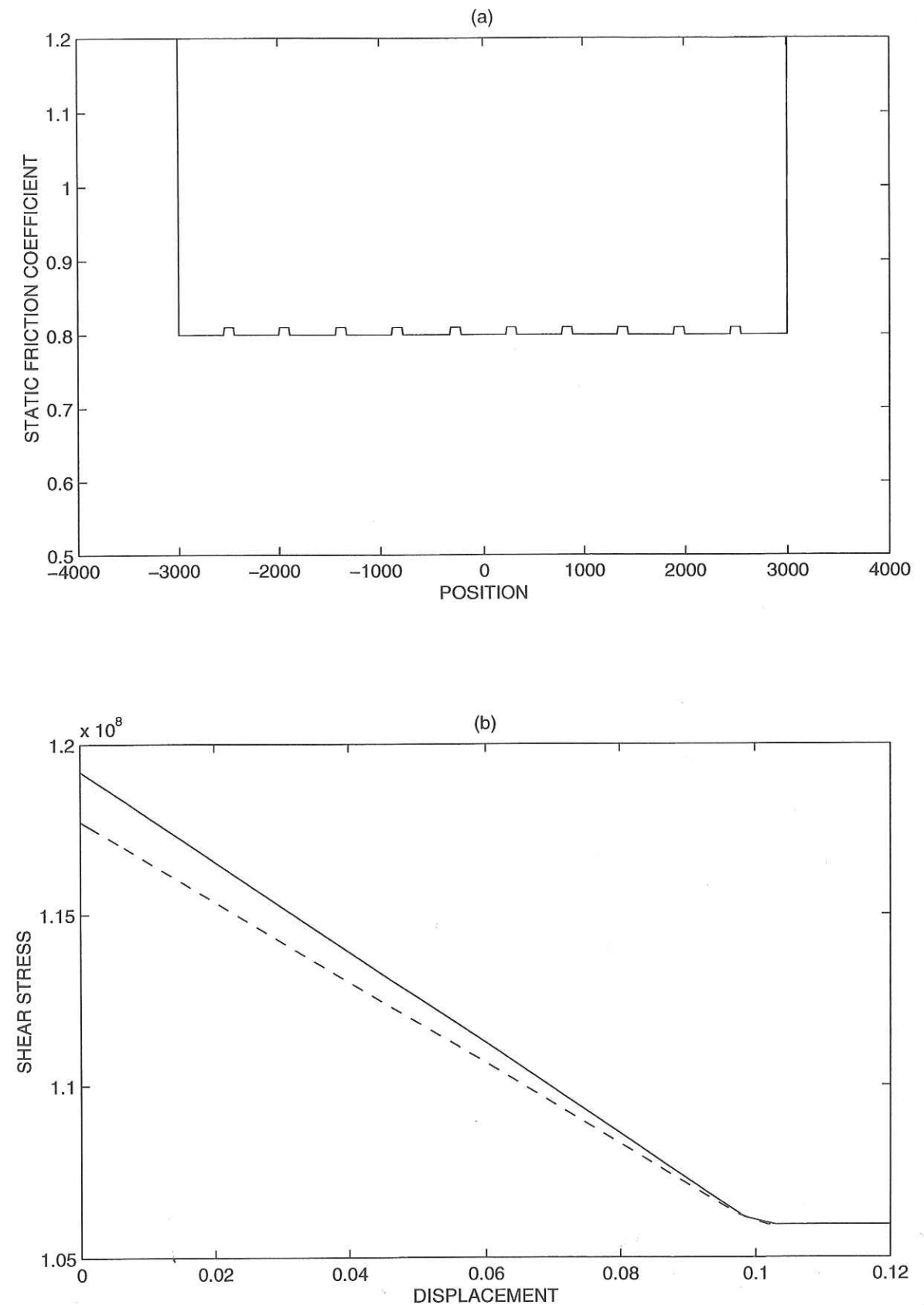


FIG. 4.1 – a) Static friction coefficient on the fault. The extremities are assumed to be unbreakable. b) The friction law on the strong (continuous line) and weak (dashed line) patches.

$$\mu^h(x, \delta) = \mu_s^w - \frac{\mu_s^w - \mu_d}{L_c} \delta, \quad \delta \leq L_c, \quad x \in \Gamma_f^w, \quad (4.5)$$

$$\mu^h(x, \delta) = \mu_d \quad \delta > L_c, \quad |x| < a.$$

On the equivalent fault we shall consider a homogeneous friction law (i.e. μ is not depending on the position x on the fault):

$$\sigma_{zy}^e(t, x, 0) = \mu^e(\delta w^e(t, x)) S \quad |x| < a, \quad \partial_t \delta w^e(t, x) > 0 \quad (4.6)$$

$$\sigma_{zy}^e(t, x, 0) \leq \mu^e(\delta w^e(t, x)) S, \quad |x| < a, \quad \partial_t \delta w^e(t, x) = 0 \quad (4.7)$$

where $\delta w^e(t, x) = \frac{1}{2}(w^e(t, x, 0^+) - w^e(t, x, 0^-))$ is the half of the relative slip and $\mu^e(\delta w)$ is the coefficient of friction on the equivalent (homogeneous) fault. Note that for the equivalent problem we will not assume a linear weakening.

The initial conditions are denoted by w_0 and w_1 , that is,

$$w(0, x, y) = w_0(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(0, x, y) = w_1(x, y). \quad (4.8)$$

Since our intention is to study the evolution of the elastic system near an unstable equilibrium position, we shall suppose that $\tau_y^\infty = S\mu_s^w$, is the static value of the friction coefficient on the weak part of the heterogeneous fault. We remark that taking w as a constant satisfies (4.1)-(4.4); hence $w \equiv 0$ is a meta-stable equilibrium position, and w_0, w_1 may be considered as small perturbation of the equilibrium.

Finally let us state the main problem of this paper:

Find the equivalent friction law $\mu^e(\delta)$ such that the equivalent displacement function $w^e(t, x, y)$ is a good approximation for the displacement evolution $w^h(t, x, y)$ during the initiation and propagation stages.

A simple heterogeneous fault model We consider a fault of finite length $2a$ with $a = 3000m$ as presented in Figure 4.1 and described in the previous section. Note that this length can be scaled with respect to the friction parameters (Dascalu et al. (2000)). A discussion of this scaling appears further in this section. The dynamic friction is assumed homogeneous on the fault. The instability begins with a small perturbation of velocity at the center of the fault and the process is modeled with a finite difference scheme (Ionescu & Campillo (1999)). In the following, the parameters of the models are kept constant when it is not specifically indicated. We consider a medium with a density $\rho = 3000kg/m^3$ and a shear velocity $c_s = 3000ms^{-1}$. The friction law parameter for the weak patches are $\mu_s = 0.8$, $\mu_d = 0.72$ and $L_c = 0.1m$. The normal stress corresponds to a depth of $5000m$. In the first model we consider the presence of 10 strong patches of width $b = 100m$ corresponding to an increase of strength $\delta\mu_s = 0.01$. While modest, this heterogeneity has a considerable influence on the development of the shear instability.

This is illustrated in Figure 4.2. We compare the results obtained with and without the presence of the strong patches. In the case on an homogeneous fault, the instability develops rapidly and the slip velocity profiles have smooth shapes. This features have been described by Campillo & Ionescu (1997) in the infinite case and by Dascalu et al. (2000) for finite faults. In presence of strength heterogeneity, the slip velocity profiles display small irregularities that are indeed characteristic of the distribution of the strong patches. Furthermore, the instability development is much slower than for an homogeneous fault. Our goal here is to check if the behavior of the heterogeneous fault can be reproduced by

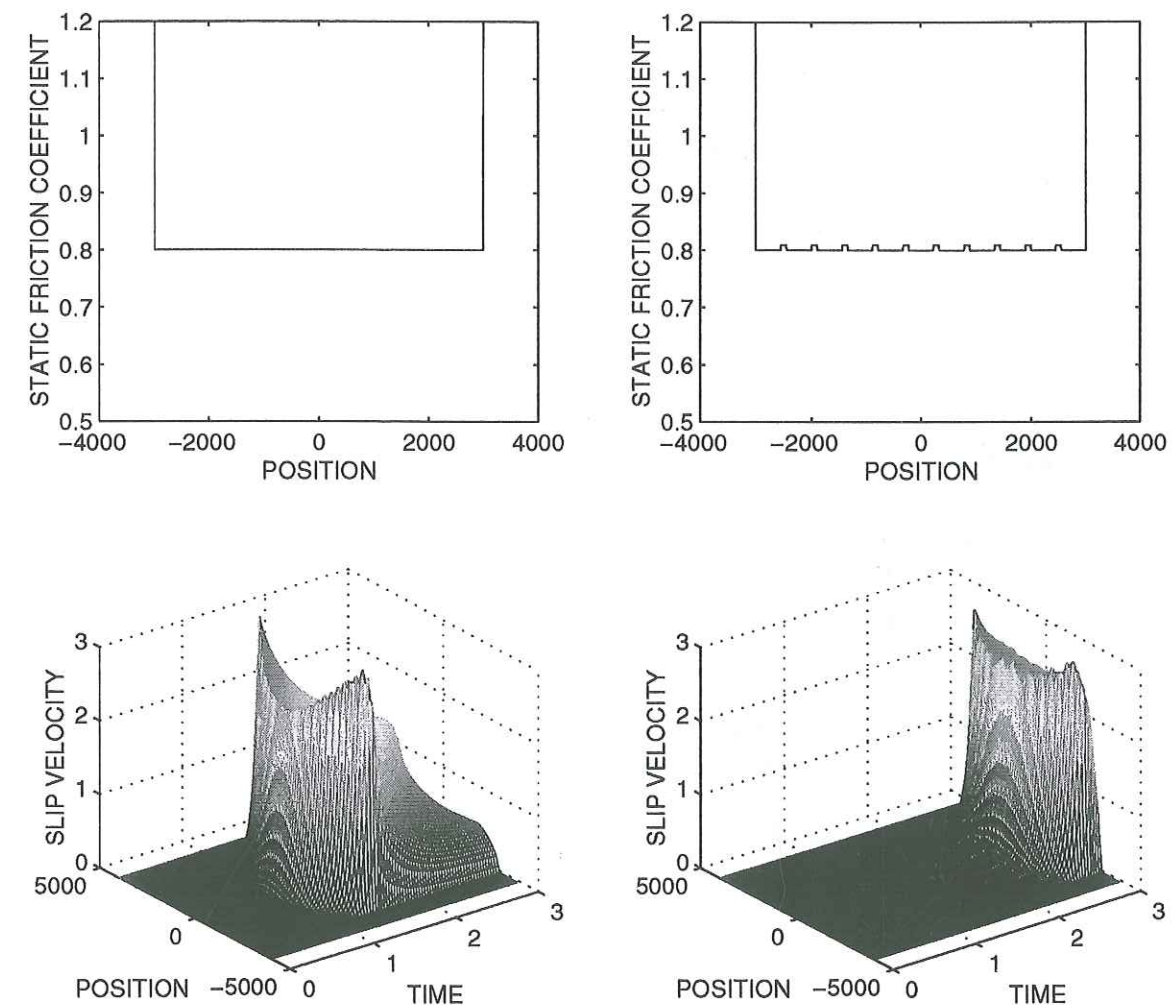


FIG. 4.2 – Comparison between the initiation on a homogeneous (left) and inhomogeneous (right) finite fault. The distribution of strength is presented on top of the evolution of slip velocity on the fault.

using a model of homogeneous fault with an 'effective' friction law. Let us first discuss the conditions of this numerical experiment with respect to the theoretical stability analysis of Dascalu et al. (2000). In the case of the homogeneous weak fault, i.e. $\delta\mu_s = 0$, the non-dimensional weakening parameter defined in this paper:

$$\beta = a\alpha_c = a \frac{S(\mu_s^w - \mu_d)}{GL_c} \quad (4.9)$$

equals 13.08 and is much larger than the critical value $\beta_0 = 1.15774$ that limits the stability domain of the system. Therefore, the homogeneous weak fault behaves like an infinite fault during the initiation. Let consider now the case of an isolated weak patch of the heterogeneous model. The value of β in this case is $b_w \frac{S(\mu_s^w - \mu_d)}{GL_c} = 0.981$ that is less than β_0 . That means that such a weak patch is not long enough to allows the instability to develop with the friction law considered here. However as shown in Figure 4.2, the instability develops on a series of weak patches separated by narrow zones of resistance because of the elastic interaction between the slipping patches. This interaction is difficult to represent mathematically but one can easily figure out the process by considering a simple analogy. The presence of a series of weak patches lowers the apparent stiffness of the body and therefore leads to a broader domain of instability than for a single isolated slipping patch.

Dynamic evaluation of the effective friction law To obtain an effective friction law for the heterogeneous fault, we rely, in this section, on theoretical results obtained for the initiation of an infinite homogeneous fault. It is possible to extrapolate this results to the case of a finite fault when it is large enough that its finiteness has no influence on the initiation process, that is when the non-dimensional parameter β is much larger than $\beta_0 = 1.1577..$ (as it is discussed in the previous section). For the infinite homogeneous fault, Campillo & Ionescu (1997) used a spectral method to separate the complete displacement $w^e(t, x, y)$ into a "wave part" that corresponds to propagation of the initial perturbation and a "dominant part" $w_d^e(t, x, y)$ that describes the exponential time growth of the instability. Rapidly the "wave part" becomes negligible and the solution can be identified to the "dominant part", i.e.

$$w^e(t, x, y) \approx w_d^e(t, x, y)$$

which has the form:

$$w_d^e(t, x, y) = \frac{\alpha_c}{\pi} \exp(-\alpha_c y) \left\{ \int_{-\alpha_c}^{\alpha_c} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp(-\alpha_c s + i\alpha(x-u)) [\text{ch}(ct\sqrt{\alpha_c^2 - \alpha^2}) w_0(u, s) + \frac{\text{sh}(ct\sqrt{\alpha_c^2 - \alpha^2})}{c\sqrt{\alpha_c^2 - \alpha^2}} w_1(u, s)] du ds d\alpha \right\} \quad (4.10)$$

with

$$\alpha_c = -\frac{\mu' S}{G}, \quad (4.11)$$

where

$$\mu' = \frac{\partial \mu}{\partial \delta}.$$

Equation (4.10) shows an important property of the displacement field inside the bulk during the initiation process: the evolution of the displacement along y is simply described by $\exp(-\alpha_c y)$. This is an almost obvious consequence of the condition of slip dependent friction that can be obtained by any linearization around the equilibrium. In the very simple conditions considered so far, it is an important property since it indicates that a parameter of the local boundary condition on the fault (the rate of slip weakening $G\alpha_c$) can be retrieved directly from the knowledge of the displacement field in the bulk. The shear stress in the bulk $\sigma_{zy}^e(t, x, y)$ can be approximated by $G\partial_y w_d^e(t, x, y)$ and therefore, during the initiation, the derivative $\frac{-1}{G} \frac{\partial \sigma_{zy}^e(t, x, y)}{\partial w_d^e(t, x, y)}$ measured in the bulk gives the rate of slip weakening μ' on the fault. Alternatively, we note that α_c is equal to the derivative of strain with respect to displacement $\frac{-1}{G} \frac{\partial \sigma_{zy}^e(t, x, y)}{\partial w_d^e(t, x, y)}$. There is no spatial scale involved in the infinite problem. Nevertheless, this shows that the local friction characteristics on the fault is governing the displacement field in an extended region around the fault. In this homogeneous case, the local property on the fault (let call it at the microscopic scale) is the same as the one inferred in the elastic bulk (let call it at the macroscopic scale). Indeed this reasoning is strictly valid in the domain of application of the linearization used by Campillo and Ionescu (1997). When the slip reaches L_c , the crack propagation begins on a part of the fault and the problem becomes heterogeneous. In the same time the stress on the fault remains constant and we can expect that, at a point in the bulk close to the fault, the stress remains constant too. The stress-displacement relation in the bulk therefore mimics perfectly the friction on the fault. It can be verified numerically easily and we verify that the agreement is perfect between stress-displacement in the bulk and on the fault. For the infinite fault, we saw that α_c can be obtained by computing the derivative of strain with respect to displacement. In the following, when more general configurations are considered, we will refer to this derivative as

$$\gamma = \frac{-1}{G} \frac{\partial \sigma_{zy}^e(t, x, y)}{\partial w_d^e(t, x, y)}.$$

Let us now apply the ideas presented for the infinite problem to the case of a finite homogeneous fault. We concentrate on the initial weakening.

Figure 4.3 presents the displacement field a short time after the initial perturbation. At the time considered (0.23s), the process is still in the initiation stage as it can be seen on Figure 4.2. The processing of this displacement field leads to a map of the parameter $\gamma(x, y)$, the derivative of shear strain with respect to displacement, that corresponded to α_c in the theory of the infinite fault. This parameter was computed for every point where the displacement is larger than a threshold value of $10^{-6}m$. One must note the narrow range of value used in the representation in Figure 4.3. It is remarkable that the value of γ measured in the vicinity of the fault is precisely the expected value for the weakening law considered here ($4.3610^{-3}m^{-1}$). This computation shows that, knowing the displacement field outside the fault, one could retrieve the weakening on the fault, even in the case of a finite fault when, as here, the fault length is much larger than the slipping patch. Indeed, for an homogeneous fault, it was just a formal exercise and a numerical validation. We can now study in the same way the case of an heterogeneous fault as the one considered for the computation presented in Figure 4.2. We shall use the numerical experiments to check if the property of the homogeneous problem can be applied to a problem with an heterogeneity of small scale. Our goal here is to define a non local effective friction law that can be used to renormalize the problem with a small scale heterogeneity into an

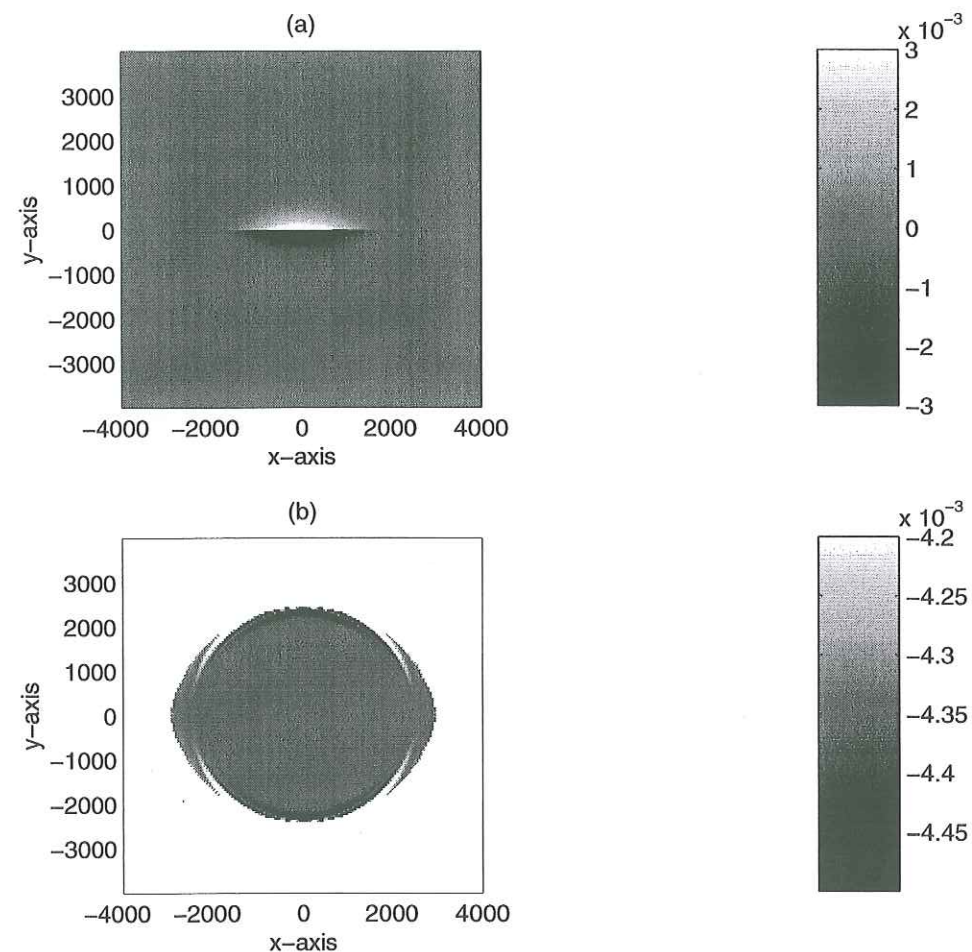


FIG. 4.3 – Top: Displacement at a time $t=0.23s$ during the initiation as a function of x and y . The computation corresponds to the one presented in Figure 4.2. Bottom: Derivative of strain with respect to displacement (γ) as a function of x and y at the same time. The value associated with the friction law in the infinite fault theory is $4.3610^{-3}m^{-1}$.

homogeneous one. So far, there is no evidence that an effective friction could be defined for an heterogeneous fault.

Definition of the effective friction law and test of its accuracy. We rely directly on the analogy with the homogeneous problem to define an effective or renormalized friction law. Using the numerical results of the heterogeneous fault model corresponding to Figure 4.3, we measure in the bulk the relation between the stress and the slip for the initiation phase, that is before the arrival of the waves associated with the propagation of crack like slipping fronts on the different sections of the fault. To choose the point of measure, let us examine the distribution of displacement and strain. We consider first a time at the beginning of the initiation phase.

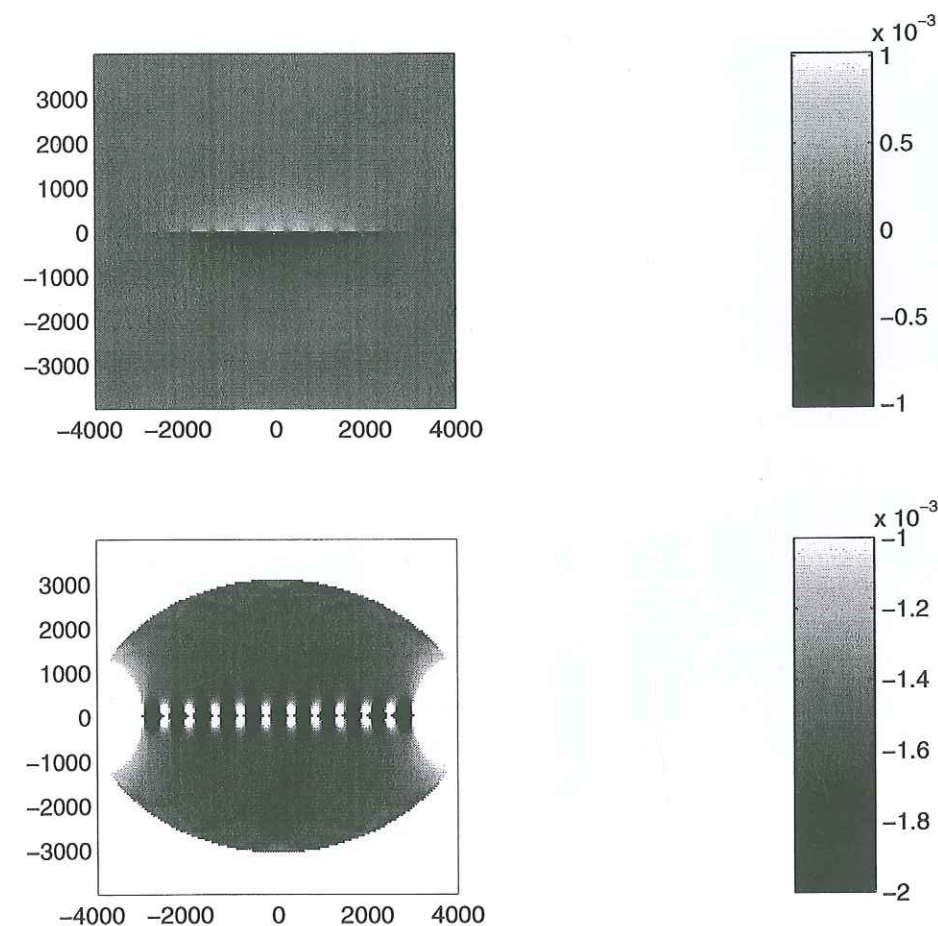


FIG. 4.4 – Top: Displacement at a time $t=0.27s$ during the initiation as a function of x and y for the heterogeneous fault. The computation corresponds to the one presented in Figure 4.2. Bottom: Derivative of strain with respect to displacement (γ) as a function of x and y at the same time. Note the constant value of γ in a broad region around the fault.

Figure 4.4 presents the results obtained in a similar way as it was done in Figure 4.3 for the homogeneous finite fault. At this point the barriers still resist and the initiation develops only on the weak patches. The heterogeneity of the displacement field is clearly visible on the top plot of Figure 4.4. Indeed this heterogeneity is also present on the distribution of the derivative of strain with respect to displacement. Nevertheless, in spite of the narrow range of value used in the plot, it is remarkable to notice that at a distance from the fault larger than the width of the weak patches, an almost constant

value is reached. This indicates the emergence of a simple collective behavior that will be interpreted as an eigenmode in the next section. Note that close to the causality limit, one can observe a criss-cross pattern which corresponds to the signature of the propagation of the initial conditions imposed to start the instability. As it will be discussed latter on, the problem remains formally identical as far as the barriers are resisting. It is interesting to visualize what happens when the barriers fail. When a first barrier begins to break, the initiation process accelerates and very rapidly, all the barriers are broken. The resistance of the fault is strongly affected and we expect a large apparent weakening rate. This can be visualized by looking at the γ parameter during this transition as it is illustrated in Figure 4.5. Note that in this case the plotting scale is much larger than in the previous plots.

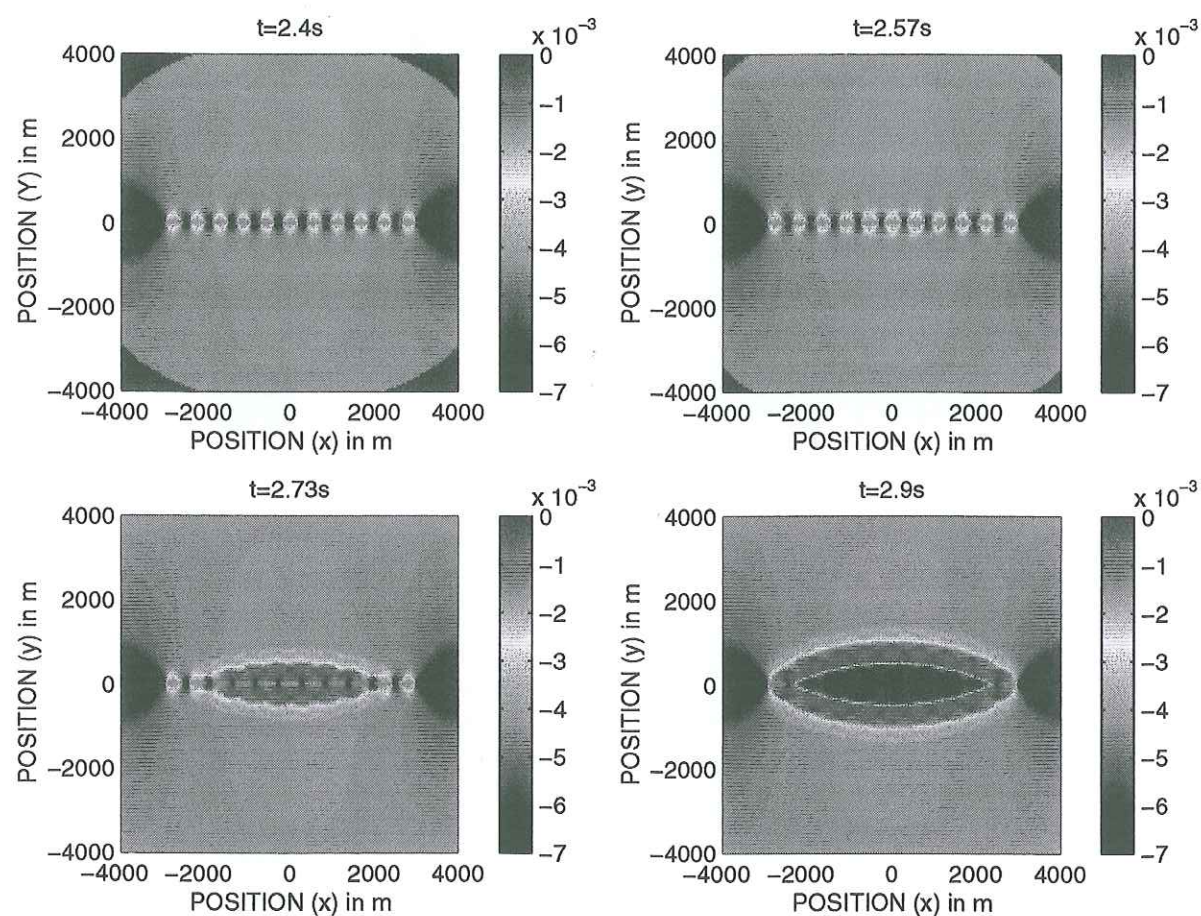


FIG. 4.5 – Top: The γ parameter at the end of the initiation and at the beginning of rupture propagation. Note the change of γ with time at a given point.

At a time of 2.4 s, the barriers are still resisting. γ has a value of $1.6310^{-3}m^{-1}$ in a broad region around the fault. The slip begins at the barriers at the center of the fault at 2.57 s. At 2.73 s, γ reaches a much larger value in the region around the slipping strong patches, indicating a strong apparent weakening. Soon after, at 2.9 s, the entire central part of the fault has slipped of more than L_c and the stress on the fault is constant equal to the dynamic friction. The corresponding apparent weakening is therefore obviously null as shown in Figure 4.5. Again this can be observed in the elastic bulk. The three stages of the physical evolution of the fault are well marked in the values of γ . This suggests that the effective friction can be searched in the bulk, at a distance of the fault of the order of the distance between two strong patches, expecting that it occurs a form of averaging by the response of the elastic body. We can check the accuracy of this rather naive approach

by a numerical test. We present in Figure 4.6 the stress-displacement relation which we propose to use as an effective friction law. It is directly derived from the numerical test at a point located at $x=1000m$ measured from the center of the fault and $y=400m$ away from the fault. We use it directly as the local condition on the surface of an homogeneous fault with the same length as previously.

Figure 4.6 shows a comparison between the slip velocity profiles on the fault at different times for the complete heterogeneous model and for the homogeneous one with the effective friction law. The global agreement is excellent. Indeed the homogeneous model cannot account for the details of the profile in the heterogeneous case, but the timing of the growth of the instability and the average shape of the velocity profile at every times are perfectly reproduced. This agreement extends further the domain of initiation in the one of crack propagation as it was suggested by the results presented in Figure 4.5. Part of the success of this comparison can be understood by considering the existence of a global mode of growth of the instability on the fault as it will be explained in the next section. One can note on Figure 4.6 that the weakening rate of the effective law at the origin is smaller than the one of the reference fault. As discussed in Ionescu & Campillo (1999), this weakening rate governs the duration of the initiation. The increase of duration of initiation due to the heterogeneity (as illustrated in Figure 4.2) is directly expressed in the effective law by the decrease of initial weakening rate.

In order to investigate the domain of applicability of this approach, we performed a series of tests with increasing $\delta\mu_s$. In Figure 4.7, we present a comparison between the heterogeneous model and the effective one for $\delta\mu_s = 0.05$. As already stated, an homogeneous model cannot account for the peculiarities of an heterogeneous one, as the high frequency wave radiation for example.

Nevertheless we find again an excellent agreement concerning the timing of the instability evolution and the smoothed shape of the velocity profiles. This numerical experiment shows that the renormalization can be performed for a broad range of model and lead to useful results for the simulation. We performed a series of computations to test the sensitivity of our results to the numerical conditions. We verified carefully that our results are independent of the grid size. To do so, we considered a grid 2 times, then 8 times smaller and we obtained almost indistinguishable effective friction laws. We tested also the dependence of the effective on the position and shape of the initial perturbation. Again, the test showed the robustness of the evaluation of the effective law. In the next section, we enter in further details in the theoretical justification of our technique.

Spectral evaluation of the effective friction law The spectral analysis relies on a linearization valid in the initiation, that is the phase of the slip evolution when the stress evolves from the fault strength to the dynamic stress. Indeed it is a peculiarity of the law with constant weakening rate used here. Campillo & Ionescu (1997) used a spectral method to solve the problem of the initiation of shear instability on a homogeneous infinite fault. In the case of an unstable finite fault with homogeneous friction properties, the initiation develops according to a finite set of eigenfunctions associated with positive eigenvalues that govern the exponential evolution of the instability. The process evolution is dominated by the greatest positive eigenvalue λ_0^2 . Indeed the displacement can be generically written in its spectral expansion as:

$$w(t, x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} [ch(ct\lambda_i)W_0^i + sh(ct\lambda_i)]W_1^i\Phi_i(x, y),$$

where $\lambda_0^2 > \lambda_1^2 > \dots$ are the eigenvalues (which are real and satisfy $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i^2 = -\infty$) and Φ_i are the corresponding eigenfunctions. After a period of time the term which involves

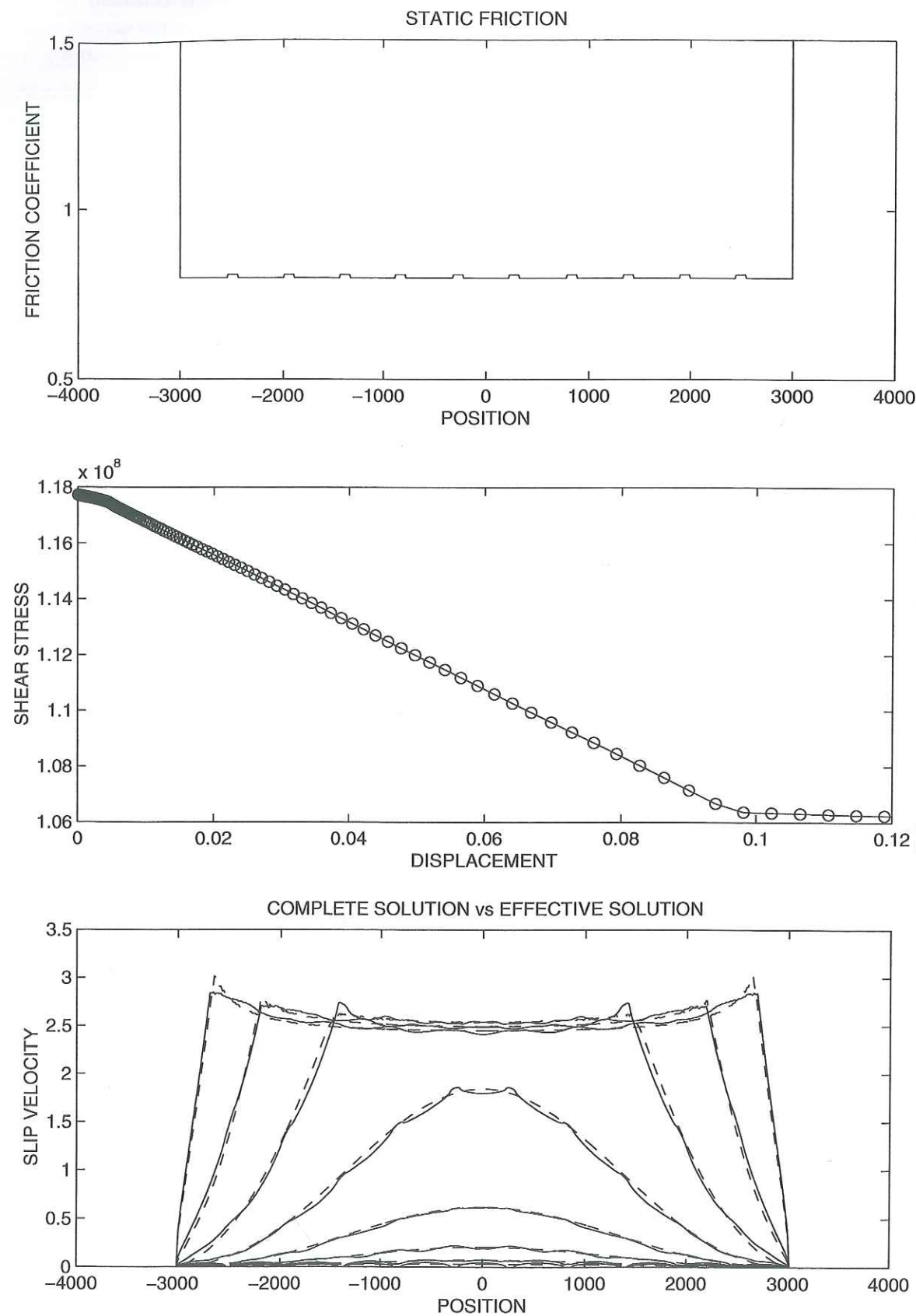


FIG. 4.6 – Top: Profile of static resistance along the fault. Center: Effective friction law used in the computation. Bottom: Comparison between the complete solution (continuous line) and the results obtained with the effective friction law (dashed lines) at the same times.

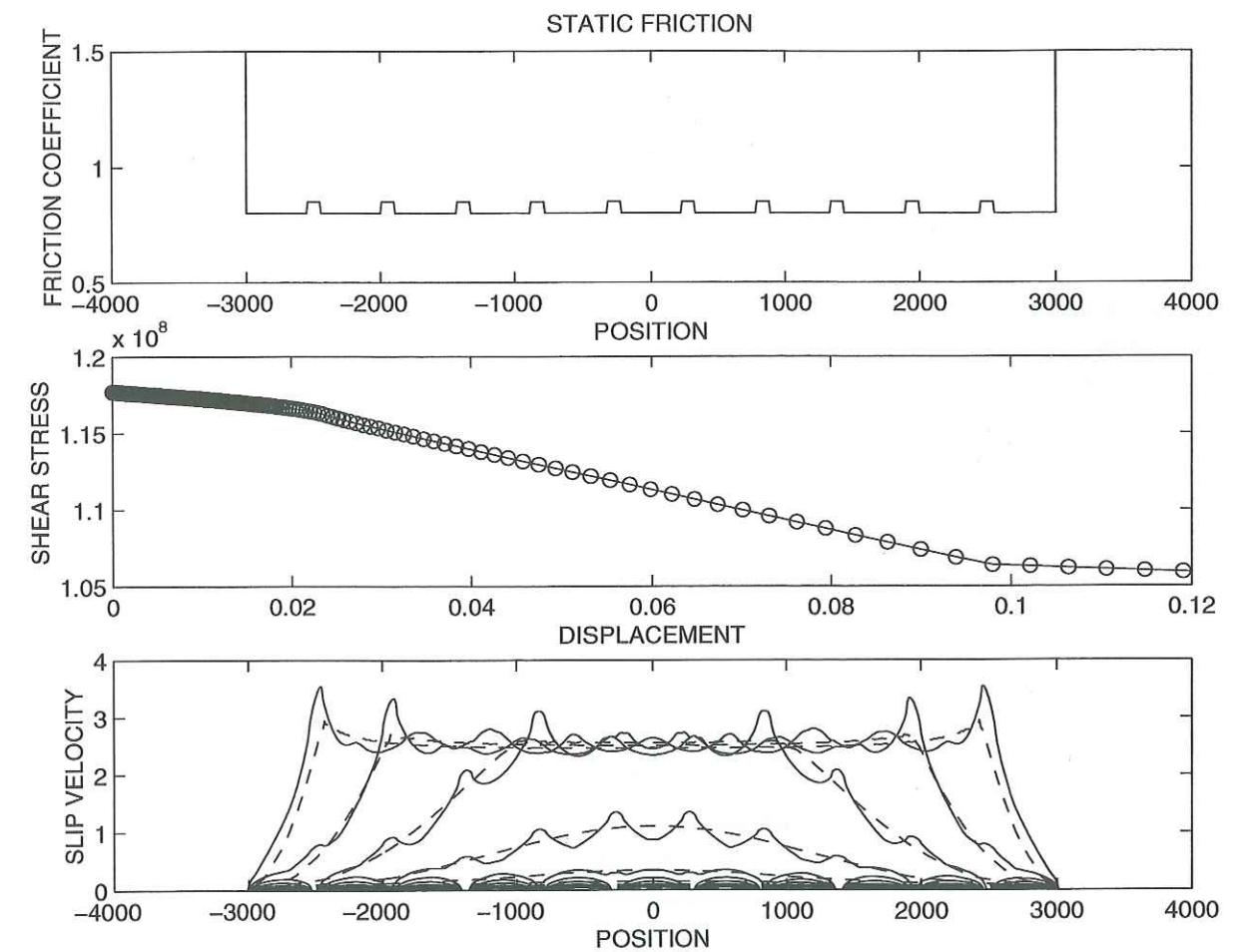


FIG. 4.7 – Top: Profile of static resistance along the fault. Center: Effective friction law used in the computation. Bottom: Comparison between the complete solution (continuous line) and the results obtained with the effective friction law (dashed lines) at the same times.

$\exp(ct\lambda_0)$ completely dominate all other terms in the series, hence we can write:

$$w(t, x, y) \approx [ch(ct\lambda_0)W_0^0 + sh(ct\lambda_0)]W_1^0\Phi_0(x, y).$$

To obtain an effective friction law for the heterogeneous fault, we rely on theoretical results obtained for the initiation of an homogeneous fault. Indeed we shall define the effective or equivalent friction as the slip dependent function which implies the same first positive eigenvalue as the one associated with the heterogeneous problem. As we have seen in the previous section, the effective laws can be reasonably approximated by piecewise linear functions (Figure 4.6 and 7). The two different slopes shown on these figures correspond to only two different successive eigenvalues in the initiation on the heterogeneous fault. They define two periods which we shall refer to as early and final initiation.

The spectral analysis is based on a linearization of the heterogeneous problem. The *early initiation* corresponds to a linear slip weakening friction on the weak part of the heterogeneous fault while the barriers remain intact. This linearization is valid until the beginning of slip on one asperity that defines the end of the early initiation stage.

Formally, at the beginning of the instability (i.e. in the early initiation) in the heterogeneous model considered here, the problem can be linearized in the form of an eigenvalue problem: find the heterogeneous early initiation eigenfunction Φ_e^h and eigenvalue $(\lambda_e^h)^2$ such that

$$\nabla^2 \Phi_e^h(x, y) = (\lambda_e^h)^2 \Phi_e^h(x, y) \quad \text{for } y > 0, \quad (4.12)$$

$$\Phi_e^h(x, 0) = 0, \quad \text{for } |x| > a, \text{ or } x \in \Gamma_f^s \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_e^h(x, 0) = -\alpha_w^h \Phi_e^h(x, 0) \quad \text{for } x \in \Gamma_f^w. \quad (4.14)$$

where α_w^h is a parameter which has the dimension of a wavenumber (m^{-1}) given by

$$\alpha_w^h = \frac{(\mu_s^w - \mu_d)S}{GL_c}. \quad (4.15)$$

Since we deal with a symmetric operator we have real-valued eigenvalues $(\lambda_e^h)^2$, i.e. λ_e^h is real or purely imaginary. This type of problem requires a numerical resolution. It can be achieved quite easily using a finite element method (Voisin et al. 2000). Let us denote by λ_{e0}^h , the greatest real eigenvalue (we suppose that there exists) and the associated eigenfunction Φ_{e0}^h of (4.12)-(4.14).

Let us consider now the spectral problem of the homogeneous case associated with the early initiation stage: find the effective early initiation eigenfunction Φ_e^e and eigenvalue $(\lambda_e^e)^2$ such that

$$\nabla^2 \Phi_e^e(x, y) = (\lambda_e^e)^2 \Phi_e^e(x, y) \quad \text{for } y > 0, \quad (4.16)$$

$$\Phi_e^e(x, 0) = 0, \quad \text{for } |x| > a, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_e^e(x, 0) = -\alpha \Phi_e^e(x, 0) \quad \text{for } |x| < a. \quad (4.18)$$

Let us denote by $\lambda_0^e = \Lambda(\alpha)$, the greatest real eigenvalue of (4.16)-(4.18). This spectral problem was already studied by Dascalu et al. (2000) with an integral method and Voisin et al. (2000) using a finite element method. They computed the relation between the first eigenvalue λ_0^e and the wave number α . From the function Λ we can deduce the early initiation equivalent wave number α_e^e and the corresponding weakening rate $\mu_e' = -\frac{G}{S}\alpha_e^e$

for the effective model. Indeed α_e^e is deduced such that we have the same eigenvalue as in the heterogeneous case, i.e. $\Lambda(\alpha_e^e) = \lambda_{e0}^h$ which gives:

$$\mu_e' = -\frac{G}{S}\Lambda^{-1}(\lambda_{e0}^h). \quad (4.19)$$

For large values $b_w\alpha_w^h \gg \beta_0 = 1.1577\dots$, i.e. large λ_e^h or "rapid" initiation, we know that the infinite fault solution can approximate the initiation phase on a finite fault (see Ionescu & Campillo (1999)). Hence we can use the analytical (and not numerical!) simple formula for $\lambda_{e0}^e(\alpha)$ obtained by Campillo & Ionescu (1997) in the case of an infinite fault i.e.

$$\Lambda(\alpha) \approx \alpha \quad (4.20)$$

In this way we can easily deduce the approximative formula for effective weakening rate in the early initiation:

$$\mu_e' \approx -\frac{G}{S}\lambda_{e0}^h.$$

As soon as the asperities begin to break, the linearization above loses its validity. There is here a complex phase with a completely non linear, heterogeneous problem. Our numerical experiments indicate that, once a barrier begins to slip its neighbors slip too very soon after. The change of behavior is very rapid in the cases we studied. When all the barriers are slipping, the problem again reduces to a linear problem. The linear slip dependence of the friction has two different slopes on the heterogeneous fault corresponding to the weak or strong parts. We shall call this stage the *final initiation*. We have first considered the early stage of initiation. Let us find now the weakening rate of the effective friction law during the final initiation stage. For this we will consider the heterogeneous eigenvalue problem corresponding to the period when all the barriers are slipping, i.e.: find the heterogeneous final initiation eigenfunction Φ_f^h and eigenvalue $(\lambda_f^h)^2$ such that:

$$\nabla^2 \Phi_f^h(x, y) = (\lambda_f^h)^2 \Phi_f^h(x, y) \quad \text{for } y > 0, \quad (4.21)$$

$$\Phi_f^h(x, 0) = 0, \quad \text{for } |x| > a, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_f^h(x, 0) = -\alpha_w^h \Phi_f^h(x, 0) \quad \text{for } x \in \Gamma_f^w, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_f^h(x, 0) = -\alpha_s^h \Phi_f^h(x, 0) \quad \text{for } x \in \Gamma_f^s. \quad (4.24)$$

where α_s^h is a wavenumber corresponding to strong patch and given by

$$\alpha_s^h = \frac{(\mu_s^s - \mu_d)S}{GL_c}. \quad (4.25)$$

Let us denote by λ_{f0}^h , the greatest real eigenvalue (we suppose that it exists) and the associated eigenfunction Φ_{f0}^h of (4.21)-(4.24). We can deduce now the final initiation wave number α_f^e and the corresponding weakening rate $\mu_f' = -\frac{G}{S}\alpha_f^e$ for the effective model such that we have the same eigenvalue as in the heterogeneous case, i.e. $\Lambda(\alpha_f^e) = \lambda_{f0}^h$ which gives

$$\mu_f' = -\frac{G}{S}\Lambda^{-1}(\lambda_{f0}^h). \quad (4.26)$$

As in the early initiation stage, for large values of $a\alpha_w^h \gg \beta_0 = 1.1577\dots$, i.e. large λ_f^h , we have the approximative formula (4.20) for effective weakening rate during the final initiation stage:

$$\mu'_f \approx -\frac{G}{S}\lambda_{f0}^h.$$

We performed numerical computations of eigenvalues using the finite element approach of Voisin et al. (2000). Both homogeneous and heterogeneous fault were considered and we found a good agreement between the weakening rates presented in Figure 4.6 and 4.7 and the effective ones deduced from the eigenvalue analysis. For example, for the early initiation, that leads to the same results for the two cases presented, we found an effective weakening rate $\mu'_e = 0.299m^{-1}$ from the results of the finite difference computation while we obtain a value $\mu'_e = 0.287m^{-1}$ from the eigenvalue analysis.

The influence of the amplitude of the friction heterogeneity. We present in Figure 4.8 the effective friction laws corresponding to the reference homogeneous case, to the two heterogeneous cases previously considered and to an heterogeneous model with $\delta\mu_s = 0.25$. This last value represents a very strong heterogeneity for which the resistance on the strong patches exceeds the normal stress. This figure shows simple properties of the effective friction law. The most obvious is the fact that the rate of weakening at the origin is the same for the 3 models, that is independent of the amplitude of the perturbation. This weakening is governed by the geometry of the distribution of heterogeneities, which is the same for the three models. Physically, the instability experiences the same resistance until the static threshold on the strong patches is reached. The apparent weakening at the beginning is therefore in all cases the same as for a series of faults separated by unbreakable barriers.

In other words, this weakening is directly linked to the first eigenvalue of the problem of the initiation on a series of finite faults. The weakening rate changes when the stress concentration on the strong patches reaches the static resistance. The weakening rate is then intermediate between the ones of the weak and strong patches. One can easily verify that the slip for which occurs the change in slope is roughly proportional to $\delta\mu_s$ as expected from a simple model of stress concentration at crack tips. In the case of $\delta\mu_s = 0.25$, the stress-displacement relation in the bulk for the initiation phase is perturbed by the strong emission of waves produced by the rupture of the strong patches. We shall see in the following that it is nevertheless possible to extract an effective law from this curve.

The influence of the geometry of the heterogeneity Since the instability develops at first through the interaction between weak patches, we can expect that the strong patch width is an important parameter which controls the initial weakening rate of the effective friction law. In order to visualize the effect of this parameter, we performed a series of computations with the different values of b : 120m, 140m and 160m and a constant value of $\delta\mu_s = 0.05$. The results are presented in Figure 4.9. The plots showing the slip velocity as a function of position and time indicate that the initiation time increases with increasing barrier width.

As a matter of fact the initial weakening rate of the effective laws, also plotted on Figure 4.9, is decreasing with increasing width of barrier. When the size of the barrier or equivalently the distance between the cracks is increasing, the interaction between the slipping patches diminishes and the collective behavior of instability is delayed. On the other hand, the slip for which the change of weakening occurs is almost constant, as expected from the model of stress concentration on the strong patches.

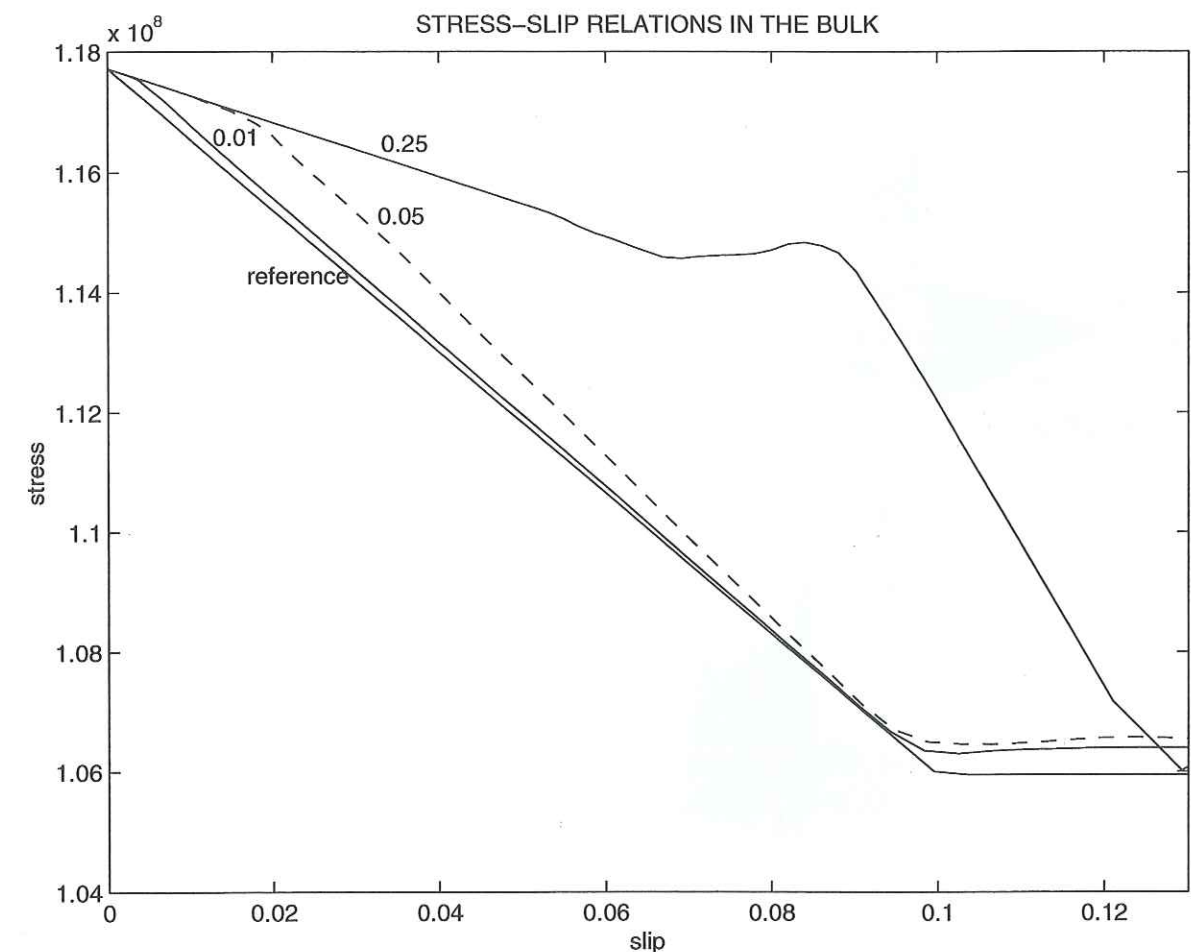


FIG. 4.8 – The stress-displacement relations measured in the bulk for different heterogeneous models. The values of $\delta\mu$ are indicated. The local friction law is also shown as reference.

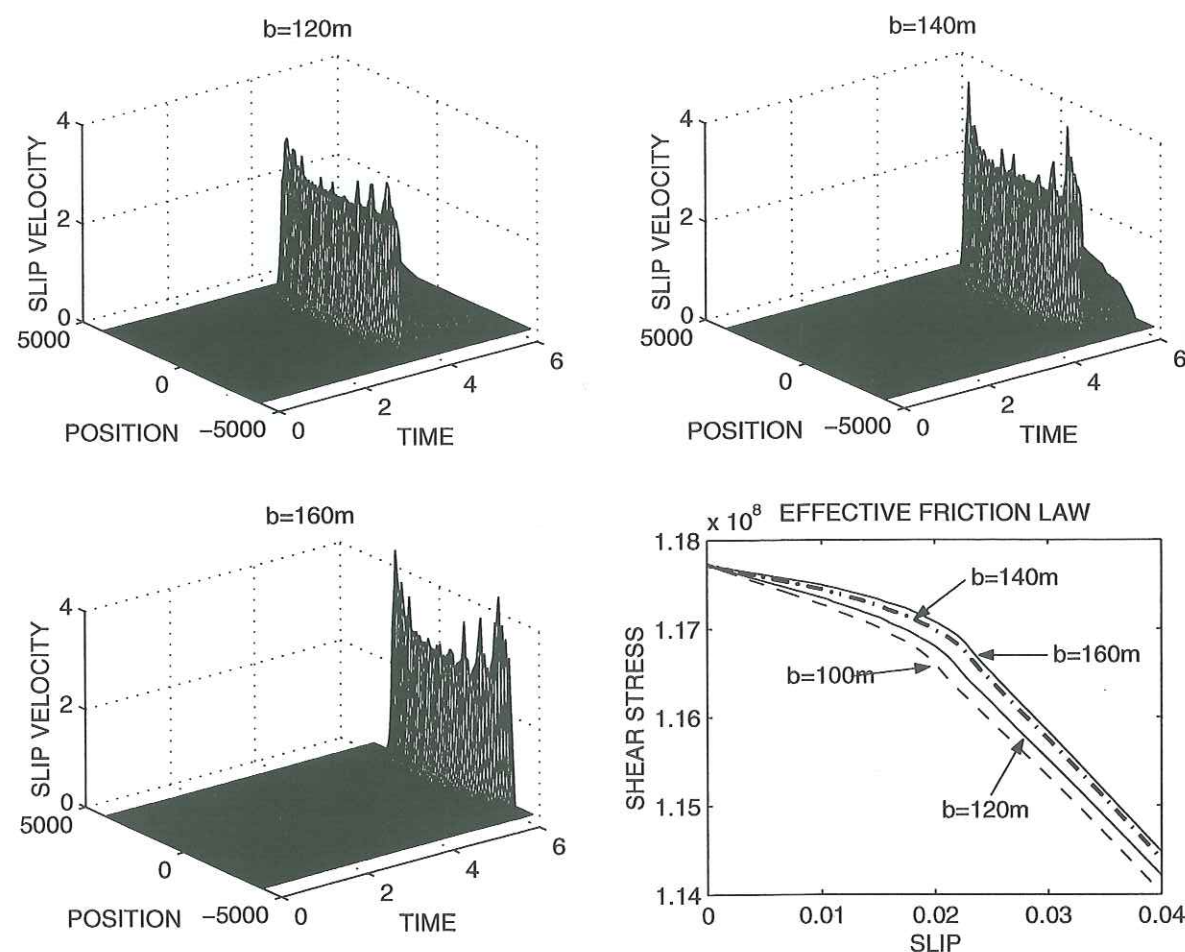


FIG. 4.9 – Slip velocity as a function of space and time for different values of b , the width of the asperities. The corresponding effective friction laws are plotted at the same scale.

The case of a very strong heterogeneity The case where $\delta\mu_s = 0.25$ corresponds to a severe heterogeneity of the fault. It corresponds to a crude approximation of an 'en echelon' fault system where well defined slipping patches are separated by geometrical barriers. The weak patches can begin to slip at relatively low stress ($0.8S$ here) while large stress concentration are required to overcome the resistance of the barriers ($1.05S$ here). As shown in Figure 4.8, it is difficult to identify directly an effective friction law from the stress-displacement relation obtained with the numerical solution of the complete model because of the perturbation by the very energetic waves produced by the rupture of the barriers. Following the simple two phase interpretation presented in the section on spectral analysis, we define the friction law by a piecewise linear function. The initial slope defines the first segment between 0 and $0.094m$. A second segment is given by the linear weakening observed between $0.094m$ and $0.125m$. The friction is constant for larger slip. One must note here that the slip for which the friction becomes constant (the critical slip) is larger for the effective law than for the local laws on both the weak and strong patches. This important point will be discussed in the next section.

The comparison of slip velocity profiles obtained for the complete model and the homogeneous fault with the renormalized law is presented in Figure 4.10. With the complete heterogeneous model, the solution exhibits strong peaks associated with the break of the asperities. On the contrary, the homogeneous effective model produces smooth profiles. Nevertheless, on average the agreement between the two models is excellent. The effective model is not expected to reproduce the small scale features of the heterogeneous model. The global features, that is timing, average shape of the profiles, mean value of slip velocity at a given time are well reproduced by the effective model.

Discussion Faults are very far from idealized planes. They exhibit geometrical irregularities as well as variations in the elastic properties of the surrounding medium. These facts cannot be ignored when setting up simple friction models. In this context the significance of the friction law must be questioned. Our simple numerical experiments show that the apparent friction does not correspond to a local physical property of the surface. If we define an effective friction law at a given length scale, we found that it is widely determined by the heterogeneity of resistance at the first smaller scale. Indeed this effect is expected from scale to scale. It is natural for seismology to consider the scale of the laboratory experiments as the one at which an intrinsic property of the sliding surface is measured. This typical length is the centimeter. The length of a fault segment for a large earthquake is of the order of tens of kilometers, that is 6 orders of magnitude larger than the laboratory scale. It is therefore not surprising that the properties of the faults at these different scales are completely different. The simple numerical experiments shown here show that the initial weakening rate is decreasing when moving from a scale to a larger one in presence of heterogeneity of resistance. Since the initial weakening of a friction law determines the initiation duration, as discussed in Ionescu & Campillo (1999), the results presented here imply that the duration of the initiation is increasing with the scale of the event considered. More specifically, the initiation time associated with a large earthquake which develops on a large area of an heterogeneous fault cannot be compared with the time deduced from the friction laws measured in the laboratory. Indeed, it can be much larger, by orders of magnitude.

The friction law of a seismogenic fault has been proposed from the analysis of records from the Landers earthquake by Madariaga & Olsen (1999) and Peyrat & Madariaga (2000) in the form of a slip weakening law similar to the one used in our computations. They found the critical slip to be of the order of tens of centimeters while the value of the critical slip L_c is typically $1\mu m$ in dynamic laboratory experiment (Ohnaka & Shen

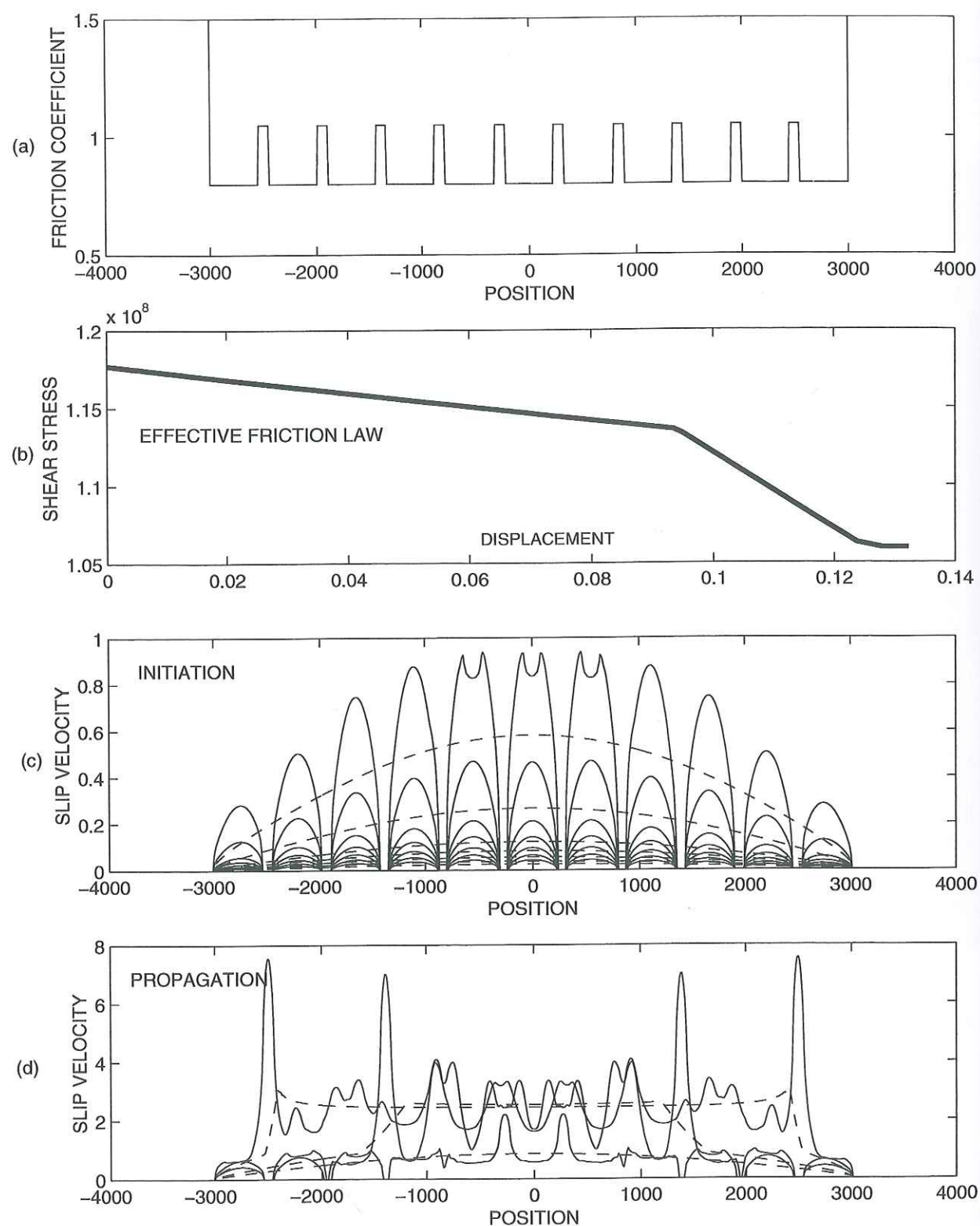


FIG. 4.10 – Top: Profile of static resistance along the fault. Center: Effective friction law used in the computation. Bottom: Comparison between the complete solution (continuous line) and the results obtained with the effective friction law (dashed lines) at the same times. The comparison is presented in the initiation and propagation phases in two separated subplots.

(1999)). Our results also indicate that the critical slip of the effective law is larger than the ones of the local laws imposed on the heterogeneous fault. Considering an homogeneous fault surface of unit area, one can define the fracture energy density as the energy in excess to the work done against the constant dynamic friction. It is proportional to the area between the friction law and the line $\mu = \mu_f$ in Figure 4.1: that is $(\mu_s - \mu_d)L_c/2$. Physically, it corresponds to the energy spent in the irreversible processes occurring during the weakening of the fault. In an heterogeneous fault as the one considered in our model, the total fracture energy can be computed by integrating over the whole fault. We have seen that the heterogeneous problem can be renormalized at a larger scale through the effective friction law. An important aspect of this modelling is to check the conservation of the fracture energy between the original heterogeneous model and its renormalized version. Numerically, we found an excellent agreement between fracture energies for models with weak perturbations of strength. To be more specific, when the critical slip of the effective law is equal to the one of the local law, we found an exact agreement. This corresponds to the cases of the previous models with static friction perturbation of 2% and 10%. On the other hand, it is not the case when considering a very strong heterogeneity, such as the model with strong barriers where the friction increase is 25%. In these conditions, the effective friction law implies a fracture energy much larger than the one of the actual model. This can be understood easily. One can notice on Figure 4.10 that before the breaking of the strong barriers, the weak patches have already finished the initiation process and have entered locally into the phase of crack propagation. In other word, when the slip begins on the strong parts, the slip is already larger than the local critical slip on the weak parts. It is why the effective critical slip is larger than the local one. In the same time, the energy associated with the weakening in the effective model includes in fact a part of the work done against the dynamic friction. In this particular case, the excess in fracture energy is about 15%. This simple observation has important implications for practical analysis. The apparent critical slip L_c is much larger from earthquake studies (that is at a kilometric scale) than from laboratory experiments. We suggest that this difference is related to the strong heterogeneity of the properties of actual fault surface at every scales (see Main (1996)). It results from a process of successive renormalizations. In this case the apparent fracture energy, deduced from seismological analysis, is a crude overestimation of the actual fracture energy.

We showed how the small scale heterogeneity of strength of a fault can be represented by an effective friction law which significantly differs from the local microscopic laws. The presence of barriers that slow down the growth of the instability is accounted for in the effective law by an initial weakening rate that is much smaller than for the local laws. This initial weakening rate governs the time of initiation. This apparent weakening is depending on the distribution of weak and strong parts on the fault. It can be computed directly from the largest positive eigenvalue of the spectral problem associated with the heterogeneous problem. Indeed, while slip is developping on the weak parts of the fault, stress concentrations build up on the barriers that eventually fail. At this point the system is changing drastically, even in its geometry. There is no possible linearization acceptable at this stage. Nevertheless, our dynamic computations shows that in the cases we considered, the system evolves very rapidly towards a new stable geometry where the entire fault is slipping. At that time, the effective friction exhibits a constant weakening rate that can be deduced from a spectral analysis.

We have only considered here one step in the change of scale. The fault length being the reference scale, we studied the effect of heterogeneity of strength with a characteristic length 10 times smaller. We showed the accuracy of an effective friction law to describe the instability at the larger scale. Indeed, since we know accurately the friction law only at the

laboratory scale, to set up a macroscopic law to be used in modelling large earthquakes, one must perform a series of renormalizations taking into account the statistical properties of the fault heterogeneity.

Bibliography

- Andrews, D.J.
Rupture Velocity of Plane Strain Shear Cracks.
J. Geophys. Res., 81, 5679-5687, 1976.
- Archuleta, R.J.
A faulting model for the 1979 Imperial Valley earthquake.
J. Geophys. Res. 89, 4559-4585, 1984.
- Burridge R. and Knopoff L.
Model and theoretical seismicity.
Bull. Seism. Soc. Am., 57, 341-371, 1967.
- Campillo, M. and I.R. Ionescu.
Initiation of an Antiplane Shear Instability under Slip Dependent Friction.
J. Geophys. Res., 102, 20363-20371, 1997.
- Carlson, J.M. and Langer J.S.
Model and theoretical seismicity.
Bull. Seism. Soc. Am., 57, 341-371, 1989.
- Cotton, F. and M. Campillo.
Frequency domain inversion of strong motions: application to the 1992 earthquake.
J. Geophys. Res. 100, 3961-3975, 1995.
- Dascalu, C., I.R. Ionescu, and M. Campillo.
Fault Finiteness and Initiation of Dynamic Shear Instability.
Earth and Planet. Sci. Let., In Press.
- Day, S.M..
Three-Dimensional Simulation of Spontaneous Rupture: The Effect of Nonuniform Prestress.
Bull. Seism. Soc. Am., 72, 1881-1902, 1982.
- Dieterich, J.H.
Modeling of rock friction, 1. Experimental results and constitutive equations.
J. Geophys. Res., 84, 2161-2168, 1979.
- Fukuyama, E and R. Madariaga.
Rupture dynamics of a planar fault in a 3D elastic medium: Rate- and slip- weakening friction.
Bull. Seism. Soc. Am. 88, 1-17, 1998.
- Hartzell, S.H. and T.H. Heaton.
Inversion of strong ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California, earthquake.
Bull. Seism. Soc. Am. 73, 1553-1583, 1983.
- Ionescu, I.R. and M. Campillo.
Numerical Study of Initiation: Influence of Non-Linearity and Fault Finiteness.
J. Geophys. Res., 104, 3013-3024, 1999.

Ida, Y.

Cohesive force along the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy.

J. geophys. Res. 77, 3796-3805, 1972.

Scholz, C.H.

The Mechanics of Earthquakes and Faulting.

Cambridge University Press, Cambridge.

Matsu'ura, M., H. Kataoka and B. Shibazaki.

Slip Dependent Friction Law and Nucleation Processes in Earthquake Rupture.

Tectonophysics, 211, 135-148, 1992.

Madariaga R.

Dynamics of an expanding circular crack.

Bull. Seism. Soc. Am., 66, 639-667, 1976.

Ohnaka M. and L. Shen.

Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation: Implication of geometry irregularity of the rupturing surfaces.

J. Geophys. Res., 104, 817-844, 1999.

Madariaga R. and K.B. Olsen.

Criticality of Rupture Dynamics in Three Dimensions.

1999.

Main, I.

Statistical physics, seismogenesis and seismic hazard.

Rev. of Geophys., 34, 4333-462, 1996.

Narteau, C., Shebalin, P., Holschneider M., Le Mouél J.L. and Allègre C.J.

Direct simulations of the stress redistribution in the scaling organization of fracture tectonics (S.O.F.T.) model.

Geophys. J. Int. in press, 1999.

Peyrat S. and R. Madariaga.

Dynamic modeling of the 1992 Landers Earthquake. *Geophys. J. Int. in press*, 2000.

Umeda, Y., Yamashita, T., Tada, T. and Kame, N.

Possible mechanisms of dynamic nucleation and arresting of shallow earthquake faulting.

Tectonophysics 261, 179-192, 1996.

Voisin, C., I.R., Ionescu, M., Campillo and Q.L. Nguyen.

Spectral analysis of the initiation process on a bounded fault region.

2000.

4.2 Une extension au cas tridimensionnel.

Dans la section précédente, nous avons défini la loi de frottement effective par le fait que, s'il existe un processus d'initiation homogène donnant lieu à une initiation, alors la solution du glissement homogénéisé doit vérifier les propriétés de la partie dominante. En géométrie antiplane, la partie dominante est telle que le déplacement décroît en $e^{-\alpha_c|y|}$ du plan de la faille. Il n'en va pas tout à fait de même en géométrie plane et en trois dimensions puisque la décroissance hors du plan ne se fait pas exactement de cette manière. Cependant, les autres termes de cette solution décroissent plus vite et sont rapidement négligeables. On peut donc tenter l'expérience d'homogénéisation en trois dimensions. Cette expérience numérique ne sert pas de preuve mais d'illustration de la possibilité de faire l'homogénéisation en trois dimensions. L'initiation a lieu sur une faille circulaire contenant une hétérogénéité périodique. Les caractéristiques du milieu élastique sont $\rho = 3000 \text{ kgm}^{-3}$, $v_s = 3333.33 \text{ ms}^{-1}$, $v_p = \sqrt{3}v_s$. La chute de contrainte vaut 10 MPa et le glissement critique vaut $2L_c = 0.48 \text{ m}$. La zone forte n'est pas connectée et ainsi la zone faible représente beaucoup plus de surface que la zone forte. La zone forte est constituée de plots circulaires de 0.3 km de diamètre et distants de 1.4 km . Leur excès de résistance vaut 10% de la chute de contrainte. Sur la figure 4.11 on trace l'histoire de la vitesse de glissement. Sur la première rangée d'images on voit d'abord la propagation de la perturbation puis le faciès d'initiation hétérogène. Il se développe suivant une allure très bombée (initiation lente) et il occupe toute la place disponible. Sur la deuxième rangée on représente la phase de cassure des barrières par encerclement des plots. Cette phase dure peu de temps. Les conséquences immédiates sont une accélération du processus et une localisation du glissement dans le plan de faille. L'allure du glissement devient conique. Enfin, sur la dernière rangée, on voit l'achèvement du processus jusqu'au crack.

Dans cette expérience, nous avons testé la possibilité d'homogénéiser numériquement le processus d'initiation. Nous avons représenté le taux d'affaiblissement effectif dans un plan parallèle à la faille ($z = 2.35 \text{ km}$) à deux temps cruciaux: avant la rupture des plots et après leur rupture. Sur la figure 4.12 en haut, on constate que l'homogénéisation se fait correctement mais il subsiste quelques variations. Les deux valeurs de taux d'affaiblissement obtenues correspondent aux deux pentes de la future loi de frottement homogénéisée. A cause des petites variations résiduelles en ($z = 2.35 \text{ km}$), nous avons choisi la loi de frottement effective en prenant une moyenne de la relation contrainte-déplacement dans le milieu élastique en quatre points à $z = 2.35 \text{ km}$. Ces derniers sont régulièrement espacés et près du centre du modèle: le point central, deux points latéraux et un point sur la diagonale. La loi de frottement effective obtenue est tracée sur le bas de la figure 4.12 avec les lois de frottement locales sur les zones faibles et sur les plots. En zoomant, on distingue bien deux pentes très différentes pour la loi homogénéisée. La pente initiale est beaucoup plus faible.

Enfin, sur la figure 4.13, on trace l'histoire du glissement avec la nouvelle loi de frottement homogène sur toute la zone circulaire. Le processus est assez fidèlement reproduit dans les grandes lignes. On reconnaît la forme bombée en initiation lente et la forme localisée conique quand on aborde la seconde partie rapide. Pour obtenir les mêmes images que dans la simulation 4.11, il a fallu décaler les dernières images en temps de 3% au maximum. Ceci signifie simplement que la croissance du glissement étant exponentielle, une petite erreur sur la pente initiale de la loi de frottement homogénéisée a très rapidement des conséquences. En antiplan ce problème n'apparaît presque pas puisqu'entre autre les conditions de discrétisation sont meilleures pour le problème équivalent. La grille est 800×400 en antiplan et $240 \times 240 \times 120$ en tridimensionnel. Cette expérience concluante nous permet de généraliser en trois dimensions la phénoménologie trouvée en

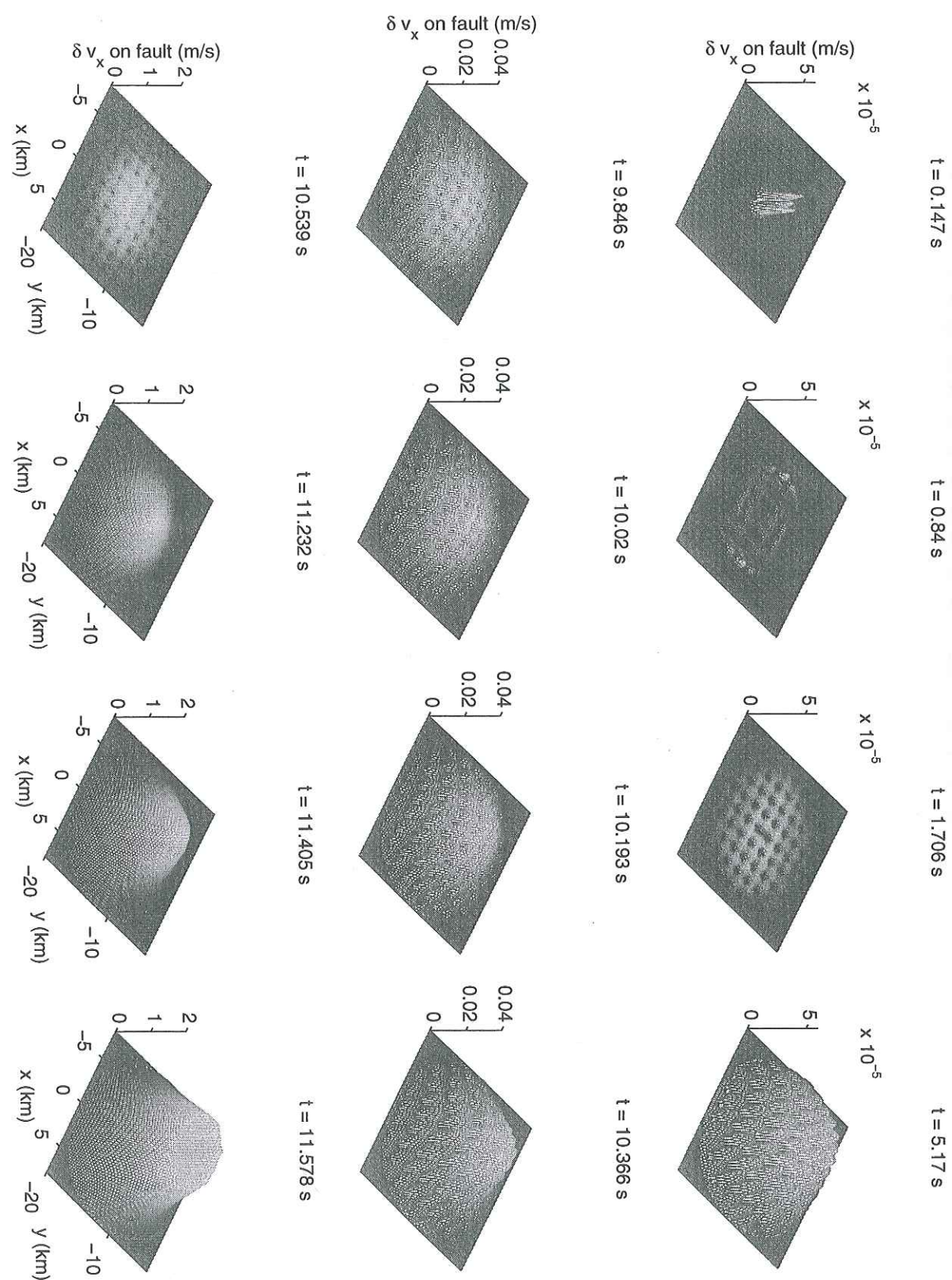


FIG. 4.11 – La vitesse de glissement sur la faille hétérogène.

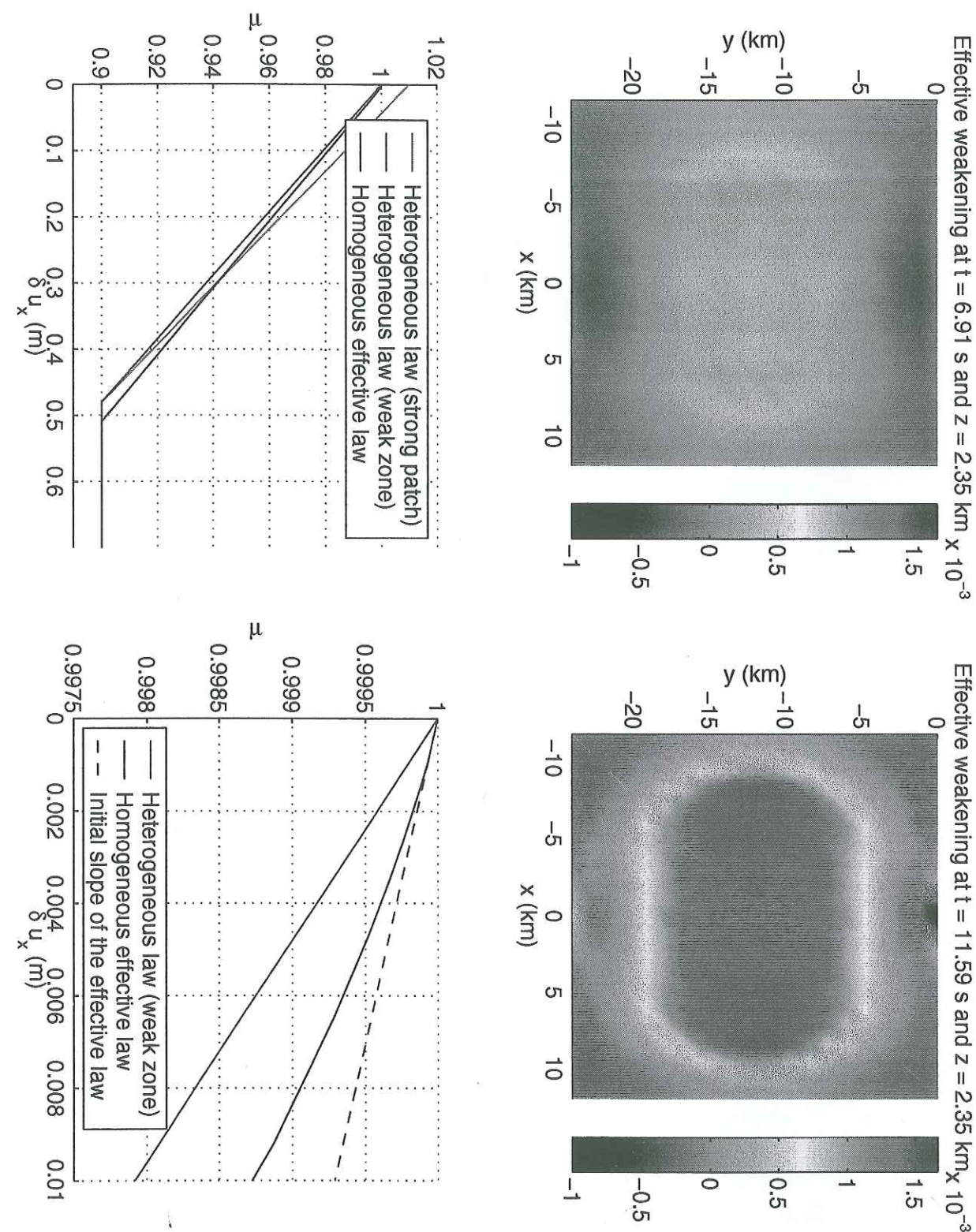


FIG. 4.12 – Le taux d'affaiblissement dans le milieu élastique et la loi de frottement effective.

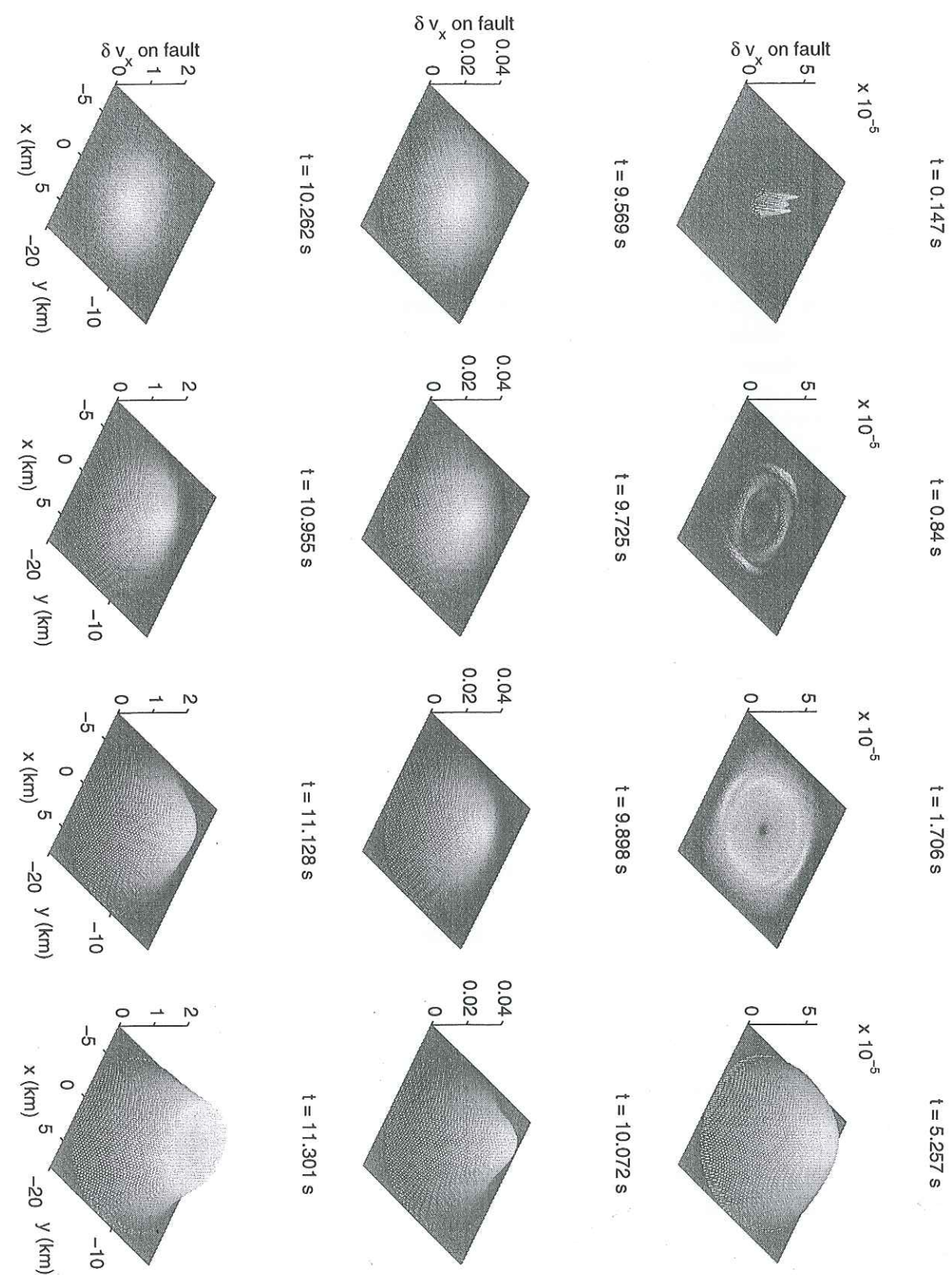


FIG. 4.13 – La vitesse de glissement sur la faille homogénéisée.

CONCLUSION.

Apports. Le modèle d'initiation des séismes présenté dans cette thèse a finalement l'avantage de reposer sur très peu d'hypothèses. La loi de frottement utilisée dans la faille est minimaliste dans son nombre de paramètres. Elle contient l'essentiel pour que, lorsqu'on la couple avec le comportement élastodynamique d'un corps déformable, on puisse décrire une phénoménologie des instabilités riche et formalisable.

Les apports techniques et théoriques de cette thèse sont les suivants:

- Une illustration claire du lien entre la non-unicité d'un problème élastodynamique mal posé et l'instabilité dans sa version régularisée. Une justification supplémentaire pour l'utilisation de la convention de retard maximal dans des problèmes dynamiques.
- Une clarification du rôle du glissement critique dans les lois de frottement "rate-and-state" en élastodynamique unidimensionnelle.
- L'analyse spectrale et la partie dominante dans les problèmes continus bidimensionnel plan et tridimensionnel infini (couplage P/S).
- Une nouvelle résolution spectrale semi-analytique du problème de la faille finie antiplane.
- Un argument pour montrer que toute l'interaction élastodynamique doit être prise en compte dans le processus d'initiation.
- Une méthode numérique conciliant initiation et propagation de la rupture en élastodynamique tridimensionnelle.
- Un modèle de source simple pour déterminer le signal précurseur en surface et les premières arrivées.
- La définition d'une loi de frottement effective en bidimensionnel et une transposition au cas tridimensionnel.

Perspectives. Maintenant que le modèle d'initiation avec loi de frottement dépendante du glissement commence à être bien exploré analytiquement et numériquement dans des cas fondamentaux, on peut raisonnablement penser à développer des modèles mécaniques d'initiation plus complexes prenant en compte la réalité géologique: les systèmes de faille et la courbure des failles. On peut trouver dans ces systèmes d'autres sources d'instabilité ou inversement des mécanismes de stabilisation.

Une autre grande perspective (peut-être lointaine) consistera à tester les prédictions de ces modèles d'initiation. D'après les simulations faites dans le quatrième chapitre, il faut s'attendre à ce que le taux d'affaiblissement de la faille augmente avec le glissement. Or d'après les simulations du troisième chapitre cela n'est pas favorable à l'observation. Il faut donc s'attendre à ce que le signal mécanique émis par un événement sismique en initiation soit très faible. Autant il est difficile de prouver qu'une phase d'initiation lente a lieu

pour les séismes, autant on peut espérer une amélioration des moyens d'observation. On peut aussi imaginer de calculer d'autres signaux théoriques induits par cette déformation (signaux électro-magnétiques par exemple).

Dans un avenir plus proche, il faut utiliser le modèle pour interpréter le détail des premières arrivées sur les sismogrammes et en tirer une meilleure compréhension du processus final d'initiation rapide des sources naturelles. Sur la figure 4.14, on voit une représentation schématique d'une première arrivée par Iio et al. (1999), d'après de nombreuses observations. Il distingue une phase montante progressive *SIP* (slow initial phase) de durée t_{SIP} . Actuellement on évoque que l'atténuation anélastique serait l'unique raison de *SIP* ... le débat est ouvert. Finalement, jusqu'à maintenant, c'est peut-être le manque de modèles pratiques d'initiation de la source qui a généralisé le scepticisme à l'égard de ces signaux. En effet, le modèle d'initiation vu dans cette thèse présente et discute une grande partie de ses implications inéluctables.

Par ailleurs, le processus d'initiation est un ingrédient physique fondamental à prendre en compte dans tout processus de rupture spontanée. Dans les expériences numériques de propagation de la rupture, on utilise habituellement un déclenchement forcé et impulsif. L'effet de ce déclenchement n'est peut-être pas négligeable pour l'histoire de la rupture dynamique, en particulier pour l'apparition des ruptures en "pulse". Dans toutes les expériences présentées ici, ce sont les paramètres physiques seuls qui déterminent l'histoire de la rupture.

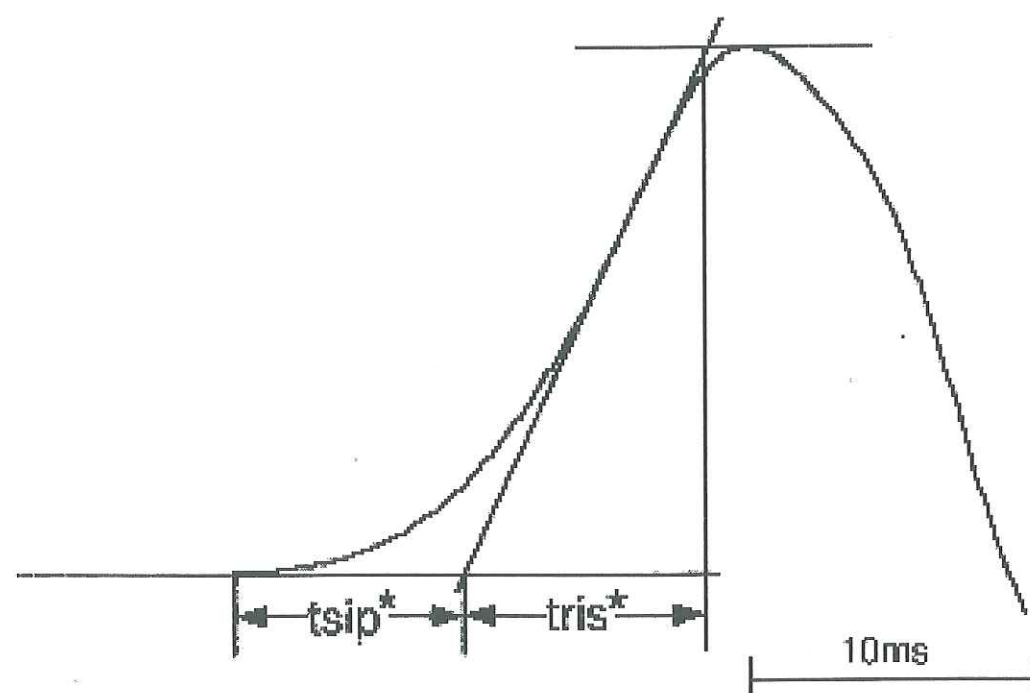


FIG. 4.14 – Les observations du signal *SIP* (slow initial phase) par Iio et al. (1999).

Bibliography

- M. Abramowitz and I. Stegun (1964).
Handbook of mathematical functions.
Dover.
- Aki, K. and P.G. Richards (1980).
Quantitative Seismology. Theory and Methods.
Freeman.
- Alart P. and Lebon F. (1997).
Numerical study of a stratified composite coupling homogenization and frictional contact.
Math. Comput. Modelling, 28, 273-286.
- Andrews, D.J. (1976).
Rupture Velocity of Plane Strain Shear Cracks.
J. Geophys. Res., 81, 5679-5687.
- Andrews, D.J. (1985).
Dynamic Plane-Strain Shear Rupture with a Slip-Weakening Friction Law Calculated by a Boundary Integral Method.
Bull. Seism. Soc. Am., 75, 1-21.
- Andrews, D.J. and Y. Ben-Zion (1997).
Wrinkle-like slip on a fault between different materials.
J. Geophys. Res., 102, 553-571.
- Archuleta, R.J. (1984).
A faulting model for the 1979 Imperial Valley earthquake.
J. Geophys. Res., 89, 4559-4585.
- Belardinelli M.E. (1994).
Implication of rate and state dependent friction for creep on shallow faults.
Annali di Geofisica, XXXVII, 1433-1451.
- Beroza G.C. and W.L. Ellsworth (1996).
Properties of the seismic nucleation phase.
Tectonophysics. 261, 209-227.
- Brace W.F. & Byerlee J.D. (1966).
Stick-slip as a mechanism of earthquakes.
Science, 153, 990-992.
- M. S. Breitenfeld and P. H. Geubelle (1998).
Numerical analysis of dynamic debonding under 2D in-plane and 3D loading.
Int. J. of Fracture, 93, 13-38
- Burridge, R. & Knopoff, L. (1967).
Model and Theoretical Seismicity.
Bull. seism. Soc. Am., 57, 341-371.
- Burridge, R. (1973).

- Admissible Speeds for Plane-Strain Self-Similar Shear Cracks with Friction but Lacking Cohesion.
Geophys. J. R. Astr. Soc., 35, 439-455.
- Campillo, M., Ionescu, I.R., Paumier, J.-C. & Renard, Y. (1996).
On the Dynamic Sliding with Friction of a Rigid Block and of an Infinite Elastic Slab.
Phys. Earth planet. Inter., 96, 15-23.
- Campillo, M. and I.R. Ionescu (1997).
Initiation of an Antiplane Shear Instability under Slip Dependent Friction.
J. Geophys. Res., 102, 20363-20371.
- Carlson, J.M. & Langer, J.S. (1989).
Mechanical Model of an Earthquake Fault.
Phys. Rev. A., 40, 6470-6484.
- Chester, F.M., (1995).
Rheological Model for Wet Crust applied to Strike-Slip Faults.
J. Geophys. Res., 100, 13033-13044.
- A. Cochard and J.R. Rice (1999).
Fault rupture between dissimilar materials: Ill-posedness, regularization and slip pulse response.
To be submitted.
- Cotton, F. and M. Campillo (1995).
Frequency domain inversion of strong motions: application to the 1992 earthquake.
J. Geophys. Res., 100, 3961-3975.
- Das, S. and K. Aki (1977).
A numerical Study of Two-dimensional Spontaneous Rupture Propagation.
Geophys. J. R. Astr. Soc., 50, 643-668.
- Dascalu, C., I.R. Ionescu, and M. Campillo (2000).
Fault Finiteness and Initiation of Dynamic Shear Instability.
Earth and Planet. Sci. Let., 177, 163-176.
- Day, S.M. (1982).
Three-Dimensional Simulation of Spontaneous Rupture: The Effect of Nonuniform Prestress.
Bull. Seism. Soc. Am., 72, 1881-1902.
- Duvaut G. (1980).
Equilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral de frottement de coulomb.
C.R. Acad. Sci. Paris, 290A, 263-265.
- Dieterich, J.H. (1978).
Time-dependent friction and the mechanics of stick-slip.
Pure Appl. Geophys., 116, 790-806.
- Dieterich, J.H. (1979).
Modeling of rock friction, 1. Experimental results and constitutive equations.
J. Geophys. Res., 84, 2161-2168.
- Dieterich, J.H. (1992).
Earthquake nucleation on faults with rate and state dependent strength.
Tectonophysics, 211, 115-134.
- Dieterich, J.H., (1994).
A Constitutive Law for Rate of Earthquake Production and its Application to Earthquake Clustering.
J. Geophys. Res., 99, 2601-2618.

- Ellsworth, W.L. and G.C., Beroza (1995).
Seismic evidence for an earthquake nucleation phase.
Science, 268, 851-855.
- Favreau P., I.R. Ionescu and M. Campillo (1999).
On The Dynamic Sliding with Rate and State Dependent Friction Laws.
Geophys. J. Int., 139, 671-678.
- Favreau, P., M. Campillo and I.R. Ionescu (1999).
Initiation of In-Plane Shear Instability under Slip-Dependent Friction.
Bull. Seism. Soc. Am., 89, 1281-1295.
- Freund L.B. (1990)
Dynamic Fracture Mechanics.
Cambridge University Press.
- Fukuyama, E and R. Madariaga (1998)
Rupture dynamics of a planar fault in a 3D elastic medium: Rate- and slip- weakening friction.
Bull. Seism. Soc. Am., 88, 1-17.
- Gu, J.-C., Rice, J.R., Ruina, A.L. & Tse, S.T., (1984).
Slip Motion of a Single Degree of Freedom Elastic System with Rate and State Dependent Friction.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 32 167-196.
- Hartzell, S.H. and T.H. Heaton. (1983).
Inversion of strong ground motion and teleseismic waveform data for the fault rupture history of the 1979 Imperial Valley, California, earthquake.
Bull. Seism. Soc. Am. 73, 1553-1583.
- C. He, S. Ma and J. Huang. (1998)
Transition between stable sliding and stick-slip due to variation in slip rate under variable normal stress conditions.
Geophys. Res. Let., 17, 3235-3238.
- F. G. Horowitz and A. Ruina (1989).
Slip patterns in a spatially homogeneous fault model.
J. Geophys. Res. 94, 10279-10298.
- Ida, Y. (1972).
Cohesive force along the tip of a longitudinal shear crack and Griffith's specific surface energy.
J. Geophys. Res. 77, 3796-3805.
- Iio, Y. (1992).
Slow initial phase of the P-wave velocity pulse generated by microearthquakes.
Geophys. Res. Let., 19, 477-480.
- Iio, Y., Ohmi, S., Ikeda, R., Yamamoto, E., Ito, H., Sato, H., Kuwahara, Y., Ohminato, T., Shibasaki, B. and Ando., M. (1999).
Slow initial phase generated by microearthquakes occurring in the western Nagano prefecture, Japan - The source effect.
Geophys. Res. Let., 26, 1979-1972.
- Ionescu, I.R. & Paumier, J.-C., (1994).
On the Contact Problem with Slip Rate Dependent Friction in Elastodynamics.
Eur. J. Mech. A/Solids, 13, 555-568.
- Ionescu, I.R. & Paumier, J.-C., (1996).
On the Contact Problem with Slip Displacement Dependent Friction in Elastostatics.
Int. J. Engng Sci., 34, 471-491.

- Ionescu, I.R. and M. Campillo (1999).
Numerical Study of Initiation: Influence of Non-Linearity and Fault Finiteness.
J. Geophys. Res., 104, 3013-3024.
- Kikuchi N. and Oden J.T. (1988).
Contact problems in elasticity.
SIAM.
- Kostrov, B. V. (1964).
Self-similar problems of propagation of shear cracks.
J. Appl. Math. Mech., 28, 1077-1087.
- Madariaga, R. (1976).
Dynamics of an Expanding Circular Fault.
Bull. Seism. Soc. Am., 66, 639-666.
- Madariaga, R. & Cochard, A., (1994).
Seismic Source Dynamics, Heterogeneity and Friction.
Annali di Geofisica, XXXVII, 1349-1375.
- Madariaga, R., K., Olsen and R. Archuleta. (1998).
Modeling Dynamic Rupture in 3D Earthquake Fault Model.
Bull. Seism. Soc. Am., 88, 1182-1197.
- Madariaga R. and K.B. Olsen. (1999).
Criticality of Rupture Dynamics in Three Dimensions.
To be submitted.
- Main, I. (1996).
Statistical physics, seismogenesis and seismic hazard.
Rev. of Geophys., 34, 4333-462.
- Mair, K. & Marone. C. (1999).
Friction and shear heating of simulated fault gouge at high velocity and normal stress.
J. Geophys. Res., 104, 28899-28914.
- Martins J.A.C and Oden J.T. (1983).
A numerical analysis of a class of problems in elastodynamics .
Compu. Meth. Appl. Mech. Engn., 40, 327-360.
- Matsu'ura, M., H. Kataoka and B. Shibazaki (1992).
Slip Dependent Friction Law and Nucleation Processes in Earthquake Rupture.
Tectonophysics, 211, 135-148.
- N. W. Mc Lachlan (1947).
Theory and application of Mathieu functions.
Clarendon Press, Oxford.
- Narteau, C., Shebalin, P., Holschneider M., Le Mouél J.L. and Allègre C.J. (1999).
Direct simulations of the stress redistribution in the scaling organization of fracture tectonics (S.O.F.T.) model.
Geophys. J. Int. in press, 1999.
- C.L. Nguyen (1998).
Instabilités liées au frottement des solides élastiques. Modélisation de l'initiation des séismes.
Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble I. France.
- Oden J.Y. and Martins. J.A.C. (1985).
Models and computational methods for dynamic friction phenomena.
Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 52, 527-634.

- Ohnaka, M., Y. Kuwahara and K. Yamamoto. (1987).
Constitutive Relations between Dynamic Physical Parameters near a Tip of the Propagation Slip during Stick-slip Shear Failure.
Tectonophysics, 144, 109-125.
- Ohnaka, M. (1996).
Non-uniformity of the Constitutive Law Parameter for Shear Rupture and Quasi-static Nucleation to Dynamic Rupture: A Physical Model of Earthquake Generation Model., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93, 3795-3802.
- Ohnaka M., Akatsu M., Mochizuki H., Odedra A., Tagashira F. and Yamamoto Y. (1997).
A constitutive law for the shear failure of rock under lithospheric conditions.
Tectonophysics, 277, 1-27.
- Ohnaka M. and L. Shen. (1999).
Scaling of the shear rupture process from nucleation to dynamic propagation: Implication of geometry irregularity of the rupturing surfaces.
J. Geophys. Res., 104, 817-844.
- Okubo P.G. & Dieterich J.H. (1984).
Effects of physical fault properties on frictional instabilities produced on simulated faults. *J. Geophys. Res.*, 89, 5817-5827.
- Perrin, G., Rice, J.R. & Zheng, G. (1995).
Self-Healing Slip Pulse on a Frictional Surface.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 43, 1461-1495.
- Peyrat S. and R. Madariaga. (2000).
Dynamic modeling of the 1992 Landers Earthquake.
Geophys. J. Int. in press 2000.
- Poston, T. & Stewart, I. (1978).
Catastrophe Theory and its applications.
Pitman, London.
- Prakash V. (1998).
Frictional response of sliding interfaces subjected to time varying normal pressure.
Journal of Tribology, 120, 97-102.
- Renard Y. (1998).
Modélisation des instabilités liées au frottement sec des solides élastiques, aspects théoriques et numériques.
Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble I. France.
- Raous M., Chabrand P. and Lebon F. (1988).
Numerical methods for frictional contact problems and applications.
J. méca. théo. et appl. 111-128 Special issue: Numerical method in mechanics of contact involving friction.
- Raous M. and Barabarin S. (1995).
Stress waves in a sliding contact, part 2: modeling.
Proc 22nd Leeds Lyon symposium on tribology, Lyon September 6 pages.
- Raous M., Barabarin S., Vola D. and Martins J.A.C (1995).
Friction induced instabilities and sound generation.
P.E, 84-2. Design Engineering Technical Conferences 3-B, ASME
- Rice, J.R. (1980).
The mechanics of earthquake rupture.
Physics of the Earth's Interiors, *Proc. Int. Sch. Phys. Enrico Fermi* (Editors, Dziewonski, A.M., and E. Boschi), North-Holland, Amsterdam, pp. 555-649.

- Rice, J.R. & Ruina, A.L. (1983).
Stability of Steady Frictional Slipping.
Journal of Applied Mechanics, 50, 343-349.
- Rice, J. R. (1993).
Spatio-temporal complexity of slip on a fault.
J. Geophys. Res., 98, 9885-9907.
- Rice, J. R. and Y. Ben-Zion (1996).
Slip complexity in earthquake fault models.
Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 93, 3811-3818.
- A.J. Rosakis, O. Samadri, R.P. Singh and A. Shukla (1998).
Intersonic crack propagation in bimaterial systems.
J. Mech. Phys. Solids, 46, 1789-1813.
- Roy M. and C. Marone (1996).
Earthquake nucleation on model faults with rate-and-state-dependent friction: Effects of inertia.
J. Geophys. Res., 101, 13919-13932.
- Ruina, A.L. (1983).
Slip Instability and State Variable Friction Laws.
J. Geophys. Res., 88, 10359-10370.
- Scholz, C.H. (1990).
The Mechanics of Earthquakes and Faulting.
Cambridge University Press.
- Shaw B.E. (1995).
Frictional weakening and slip complexity in earthquake faults.
J. Geophys. Res., 100, 18239-18251.
- Shibazaki, B. and M. Matsu'ura (1992).
Spontaneous Processes for Nucleation, Dynamic Propagation and Stop of Earthquake Rupture.
Geoph. Res. Lett., 1189-1192.
- Sornette A. and Sornette D. (1990).
Earthquake rupture as a critical point: consequences for telluric precursors.
Tectonophysics, 179, 327-334.
- T. Ito, K. Nagamine, K. Yamamoto, M. Adachi and I. Kawabe (1999).
Preseismic hydrogen gas anomalies caused by stress-corrosion process preceding earthquakes.
Geoph. Res. Lett., 26, 2009-2012.
- Umeda, Y., Yamashita, T., Tada, T. and Kame, N. (1996).
Possible mechanisms of dynamic nucleation and arresting of shallow earthquake faulting.
Tectonophysics 261, 179-192.
- Vallianatos F. and Tzanis A. (1998).
Electric current generation associated with the deformation rate of solid: preseismic and coseismic signals.
Phys. Chem. Earth, 23, 933-938.
- Virieux, J. and R. Madariaga (1982).
Dynamic Faulting Studied by a Finite Difference Method.
Bull. Seism. Soc. Am., 72, 345-369.
- Voisin, C., I.R., Ionescu, M., Campillo and Q.L. Nguyen. (1999).

Spectral analysis of the initiation process on a bounded fault region.
Submitted to Geophys. J. Int.

Initiation and propagation of the seismic rupture: frictional instability in elastodynamics.

Abstract.

A nucleation phase of earthquakes has been detected on seismograms. Meanwhile, rupture experiments in laboratory, between blocks of rock, describe a process of nucleation and give a weakening law of the interface strength, as a function of its relative slip. We interpret parts of these observations by a model of initiation: a frictional instability in elastodynamics. In one dimension, while a rate law leads to an ill-posed problem, (multiple solutions, shocks and necessity of the perfect delay convention), a slip law gives a unique continuous solution, with a non-null time of instability. We study the properties of the initiation in two and three-dimensional shear problems in complete elasticity with the slip law. When a linearization is possible, we perform a spectral analysis and we find an analytical approximation (dominant part). For complex processes (non-linear, heterogeneity and rupture propagation), we simulate numerically by finite difference. The time of initiation is a function of the geometry and the size of the fault, in relation with the initial rate of weakening. Close to the stability (small rates), finite faults initiate very slowly. The signal observed at the surface by the initiation in depth is very dependent of this rate. Finally, we show that heterogeneity increases the time of initiation. In the case of a periodic frictional heterogeneity, one can define an homogeneous and equivalent friction law. These properties have been shown both in two and in three dimensions.

Auteur: Pascal FAVREAU

Titre: Initiation et propagation de la rupture sismique: instabilité de frottement en élastodynamique.

Résumé. A partir des sismogrammes, une phase de nucléation des séismes, peu radiative, a été détectée. En laboratoire, des expériences de rupture, entre deux blocs rocheux, décrivent un processus de nucléation et donnent une loi d'affaiblissement de la résistance de l'interface en fonction de son glissement relatif. Nous interprétons une partie de ces observations par un modèle d'initiation: une instabilité de frottement en élastodynamique. Dans le cas unidimensionnel, alors qu'une loi en vitesse aboutit à un problème mal posé (multiplicité de solution, chocs et nécessité de la convention de retard maximal), une loi en glissement fournit une solution unique, continue, avec un temps d'instabilité non nul. Nous étudions les propriétés de l'initiation dans des problèmes de cisaillement bi et tridimensionnels en élasticité complète avec la loi en glissement. Quand une linéarisation est possible, nous menons une analyse spectrale et trouvons une approximation analytique (partie dominante). Pour des processus complexes (affaiblissement non-linéaire, hétérogénéité et propagation de la rupture), nous simulons numériquement en différences finies. Le temps d'initiation est fonction de la géométrie et de la taille de la faille, en rapport avec le taux d'affaiblissement initial. Proches de la stabilité (taux faible) les failles finies s'initient très lentement. Aussi, le signal émis en surface par l'initiation en profondeur est très dépendant de ce taux. Enfin nous montrons que l'hétérogénéité rallonge le temps d'initiation. Ces propriétés ont été vérifiées à la fois dans les cas bi et tridimensionnels.

Discipline: Géophysique - Géochimie - Géomécanique

Mots-clés: initiation, propagation, rupture, instabilité, frottement, élastodynamique, séisme.

UFR Observatoire. Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique.

1381 rue de la piscine 38041 GRENOBLE CEDEX 9 FRANCE

&

UFR SFA, Laboratoire de Mathématiques.

Camus scientifique 73376 LE BOURGET-DU-LAC CEDEX FRANCE